

人工腎臓器の数学モデル

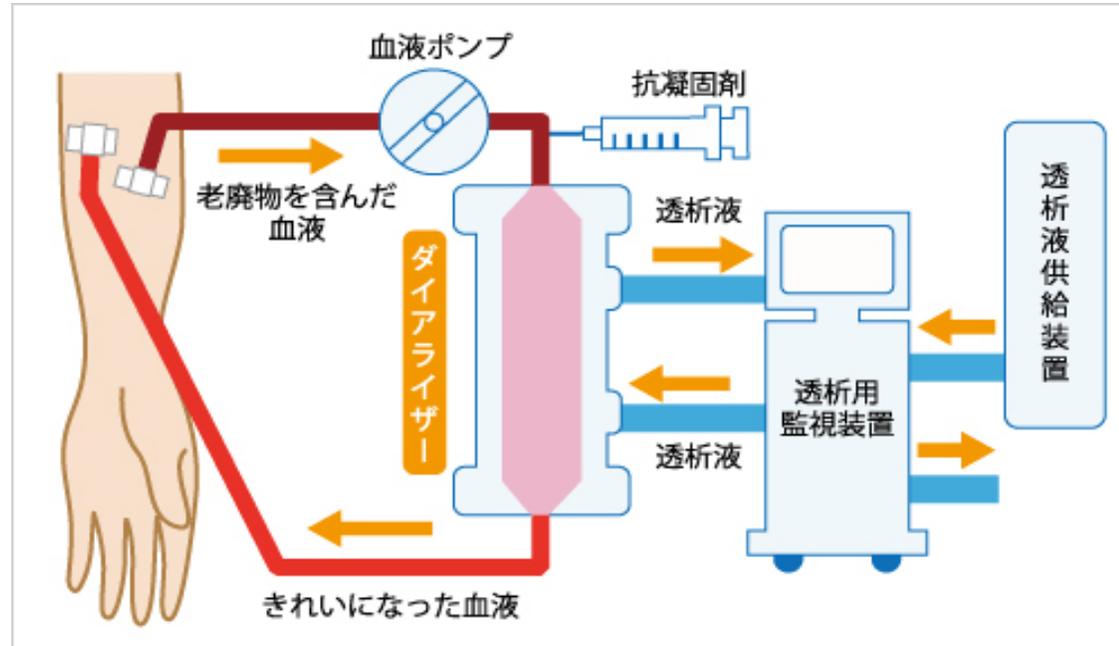
北海道大学理学部数学科二年

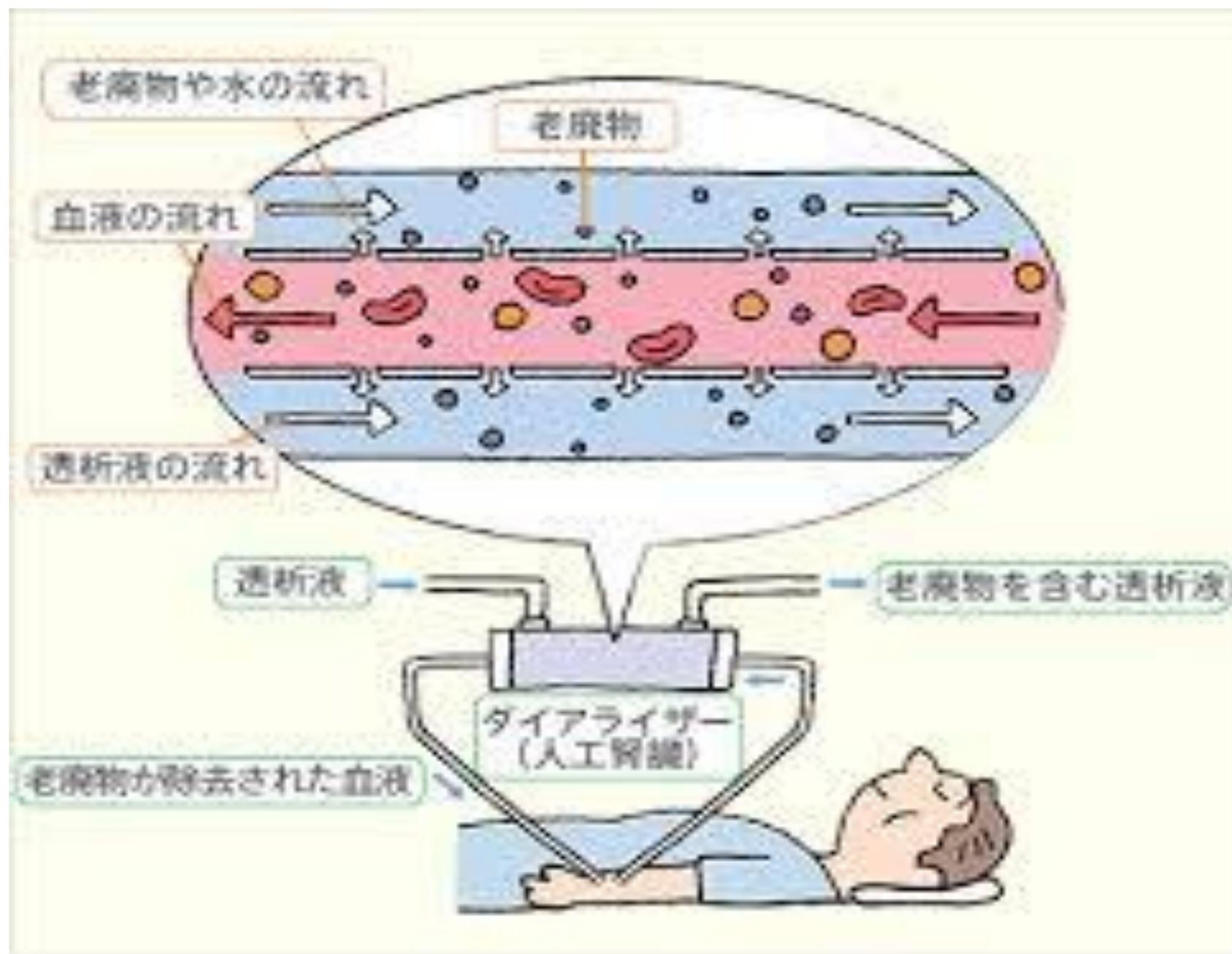
数理科学グループ

祐川翼

人工腎臓機（透析装置）の概要

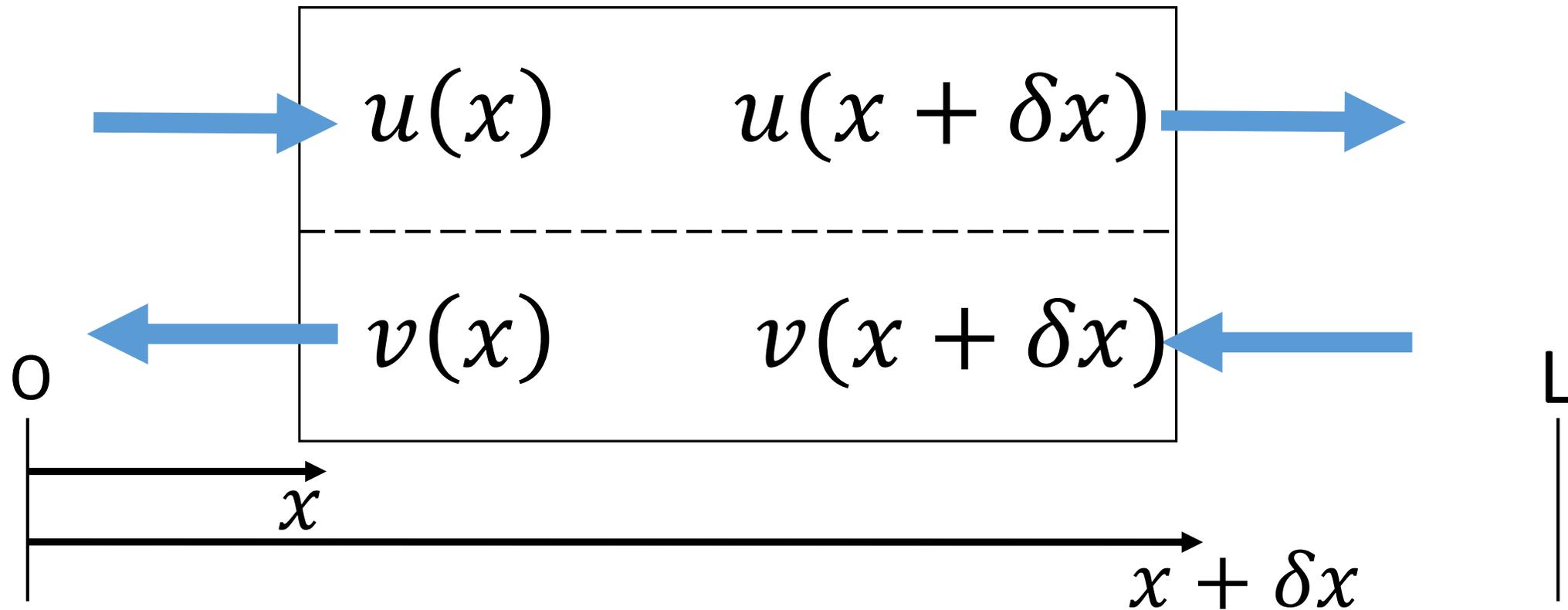
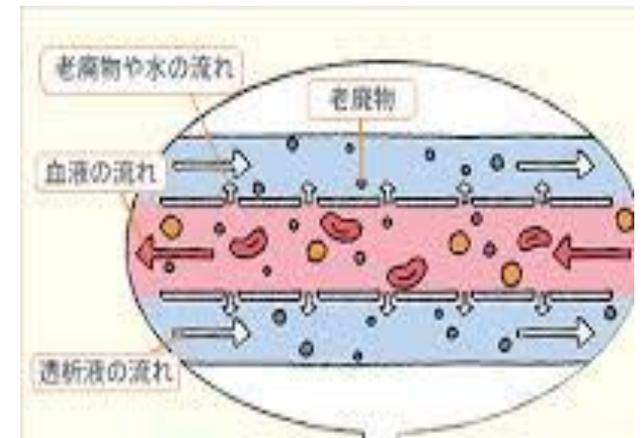
- ・人体における腎臓の機能は血液中の老廃物を除去すること。
- ・もしも、この機能に障害が起こると、老廃物が蓄積され生死に関わる。
- ・人工腎臓機（透析装置）を用いて老廃物を除去する。





モデル

- x : 透析装置に沿った距離 ($0 \leq x \leq L$)
- $u = u(x)$: 距離 x における血液中の老廃物の濃度
- $v = v(x)$: 距離 x における透析液中の老廃物の濃度



フィックの法則

: 単位時間に単位面積の膜を通過する物質の総量は膜のその位置における濃度差に比例する。

$$k[u(x) - v(x)]\delta x$$

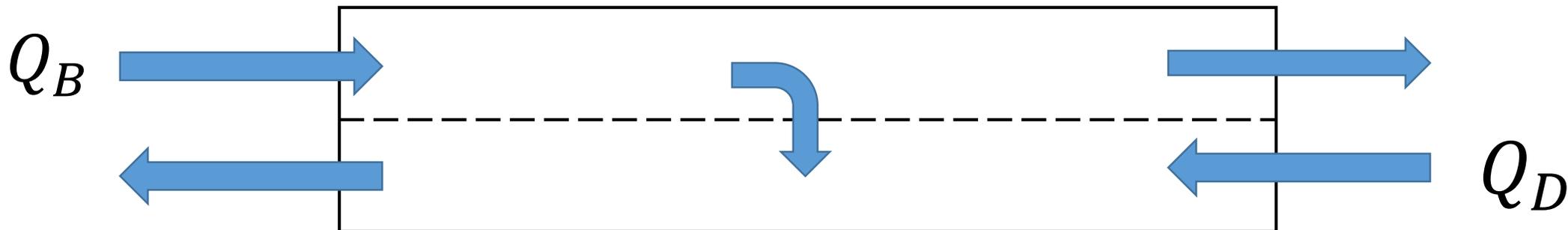
: 距離 x における単位時間あたりの老廃物の透過量。

k : 比例定数(膜の材質等によって決まる。)

δx : 微小距離

(血液領域に入る老廃物の流量) = (膜を透過する流量)
+ (血液領域から出て行く流量)

(透析液領域に入る老廃物の流量)
+ (膜を透過する流量) = (透析液領域から出て行く流量)



$$Q_B u(x) = k[u(x) - v(x)] + Q_B u(x + \delta x)$$
$$Q_D u(x + \delta x) + k[u(x) - v(x)] = Q_D v(x)$$

Q_B : 単位時間あたりに血液領域に流れる血液の流量

Q_D : 単位時間あたりに透析液領域に流れる透析液の流量

微分方程式モデル

$$\textcircled{1} Q_B u(x) = k[u(x) - v(x)]\delta x + Q_B u(x + \delta x)$$

$$\textcircled{2} Q_D u(x + \delta x) + k[u(x) - v(x)]\delta x = Q_D v(x)$$

$$Q_B \frac{u(x + \delta x) - u(x)}{\delta x} = -k[u(x) - v(x)]$$

$$-Q_D \frac{v(x + \delta x) - v(x)}{\delta x} = k[u(x) - v(x)]$$

$\delta x \rightarrow 0$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{k}{Q_B} (u - v)$$

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{k}{Q_D} (u - v)$$

①+②

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = -\alpha(u - v)$$
$$\frac{dz}{dx} = -\alpha z$$
$$z(x) = Ae^{-\alpha x}$$

ただし、

$$z = u - v. \quad \alpha = \frac{k}{Q_B} - \frac{k}{Q_D}$$

また、

Aは任意定数

• ①より

$$\frac{du}{dx} = -\frac{k}{Q_B} z = -\frac{kA}{Q_B} e^{-\alpha x}$$
$$u(x) = B + \frac{kA}{Q_B} e^{-\alpha x}$$

$u - v = z$ より、

$$v(x) = B + \frac{kA}{Q_D} e^{-\alpha x}$$

$x = u_0$ のとき $u = u_0$, $x = L$ のとき $v = 0$

という初期条件をあたえると

$$u = u_0 \left[\frac{(e^{-\alpha L}/Q_D) - (e^{-\alpha x}/Q_B)}{(e^{-\alpha L}/Q_D) - (1/Q_B)} \right]$$

$$v = \frac{u_0}{Q_D} \left[\frac{e^{-\alpha L} - e^{-\alpha x}}{(e^{-\alpha L}/Q_D) - (1/Q_D)} \right]$$

クリアランス（浄化率、clearance）

- 透析装置の性能を表している。

$$Cl = \frac{Q_B}{u_0} [u_0 - u(L)]$$

Cl : クリアランス

L : 透析装置の長さ

先ほど求めた u を用いると

$$Cl = Q_B \left[\frac{1 - e^{-\alpha L}}{1 - (Q_B/Q_D)e^{-\alpha L}} \right]$$

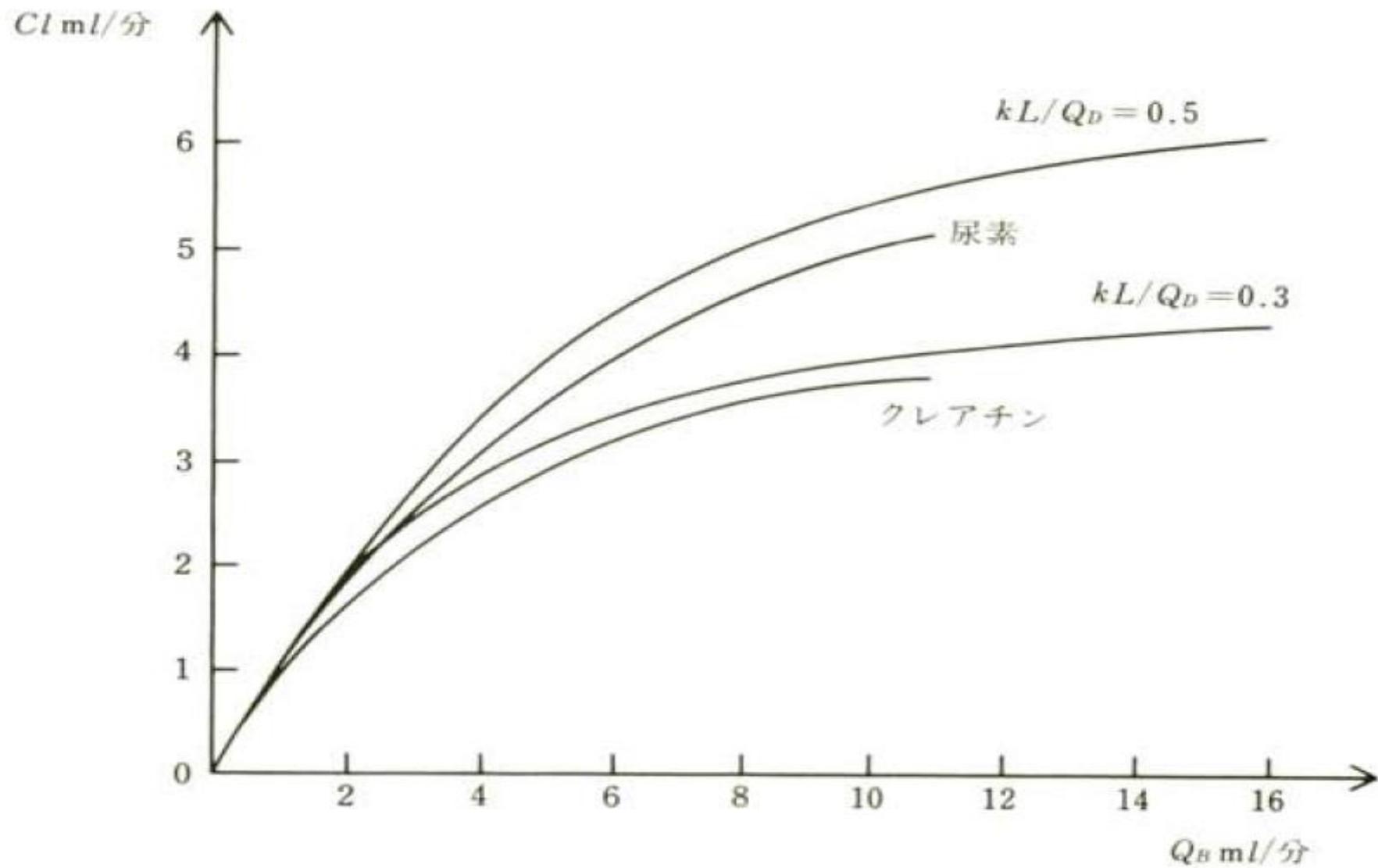
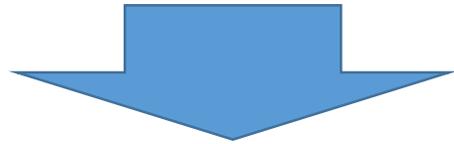


図 2.11 浄化値の実験曲線と理論曲線

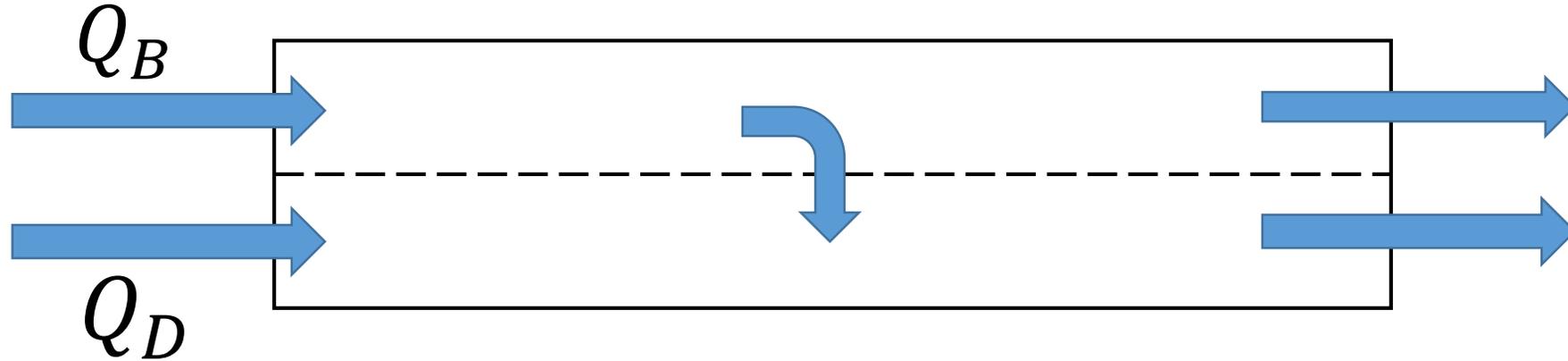
最適な透析装置について

- 先ほどのグラフから、流す血液が多くなるほど、クリアランスの増加率は低くなることが予想できる。
- 実際には、血を抜きすぎると患者の負担が大きくなるので血を抜く量は限られている。



患者に負担をかけずに効率よく老廃物を除去する
透析装置が求められる。
様々な工夫ができないだろうか？

血流と同方向に透析液を流した場合



$$Q_B u(x) = k[u(x) - v(x)] + Q_B u(x + \delta x)$$

$$Q_D u(x) + k[u(x) - v(x)] = Q_D v(x + \delta x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{k}{Q_B} (u - v)$$

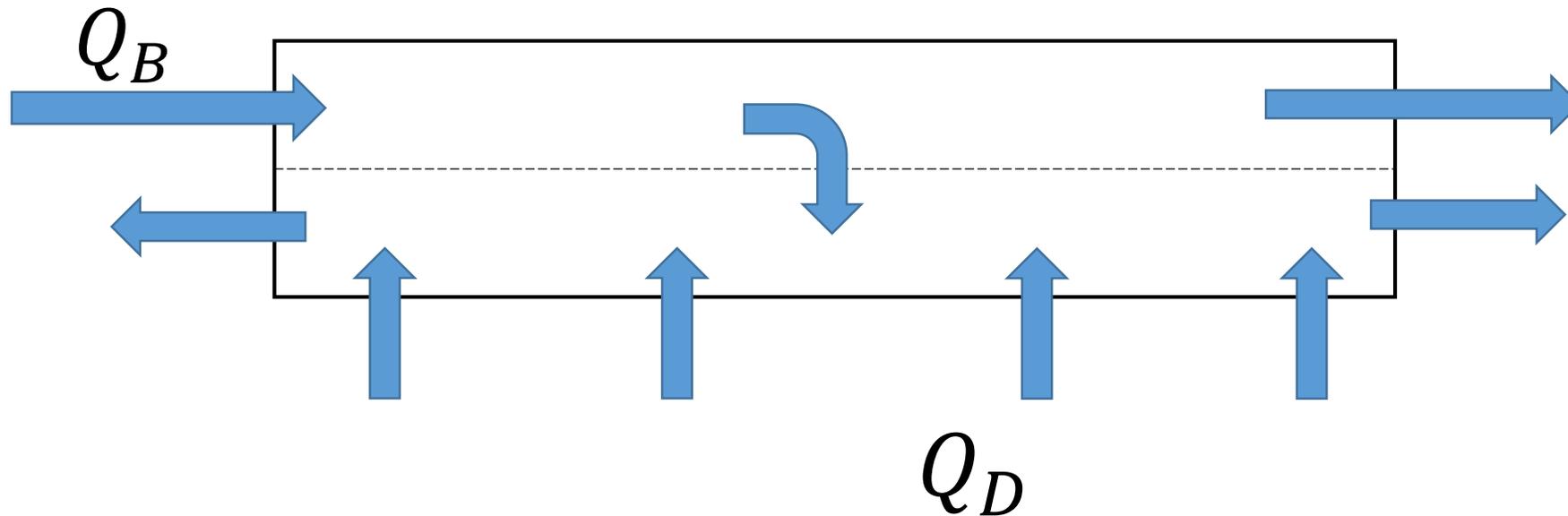
$$\frac{dv}{dx} = \frac{k}{Q_D} (u - v)$$

今後の課題

- クリアランスを上昇させるモデルを考える。

例: 逆方向に流す。(先述)

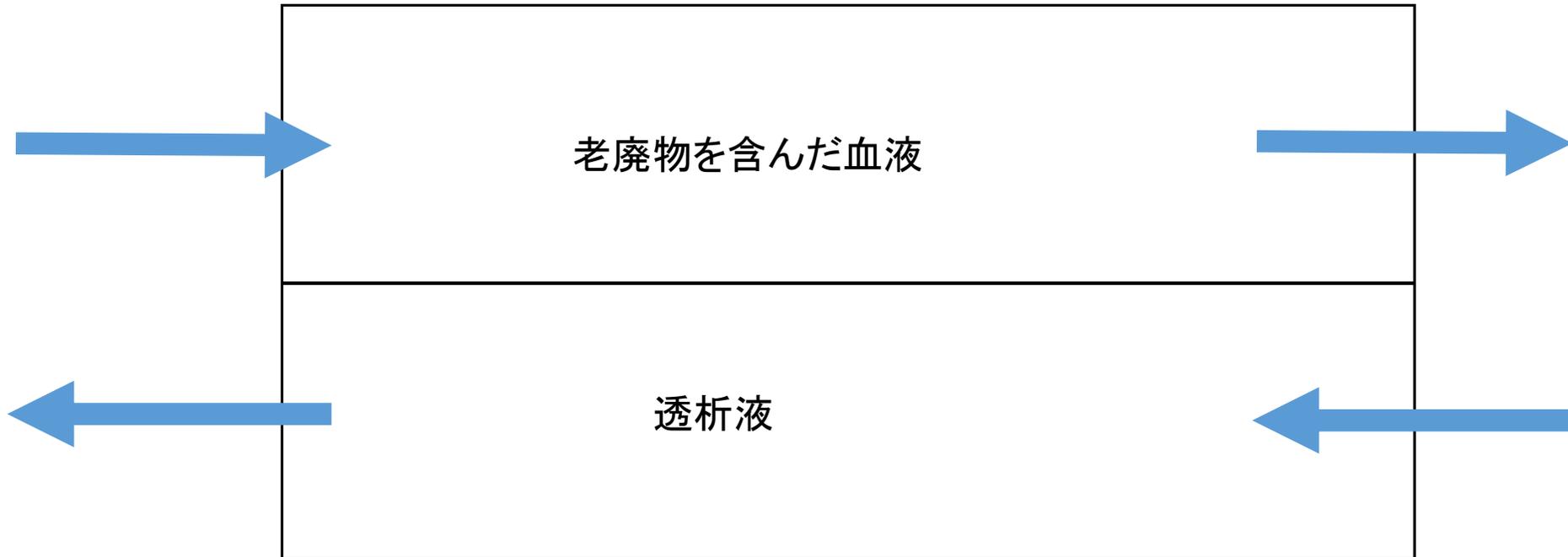
例: 透析装置の構造を変えてみる



これで発表を終わります。
ありがとうございました。

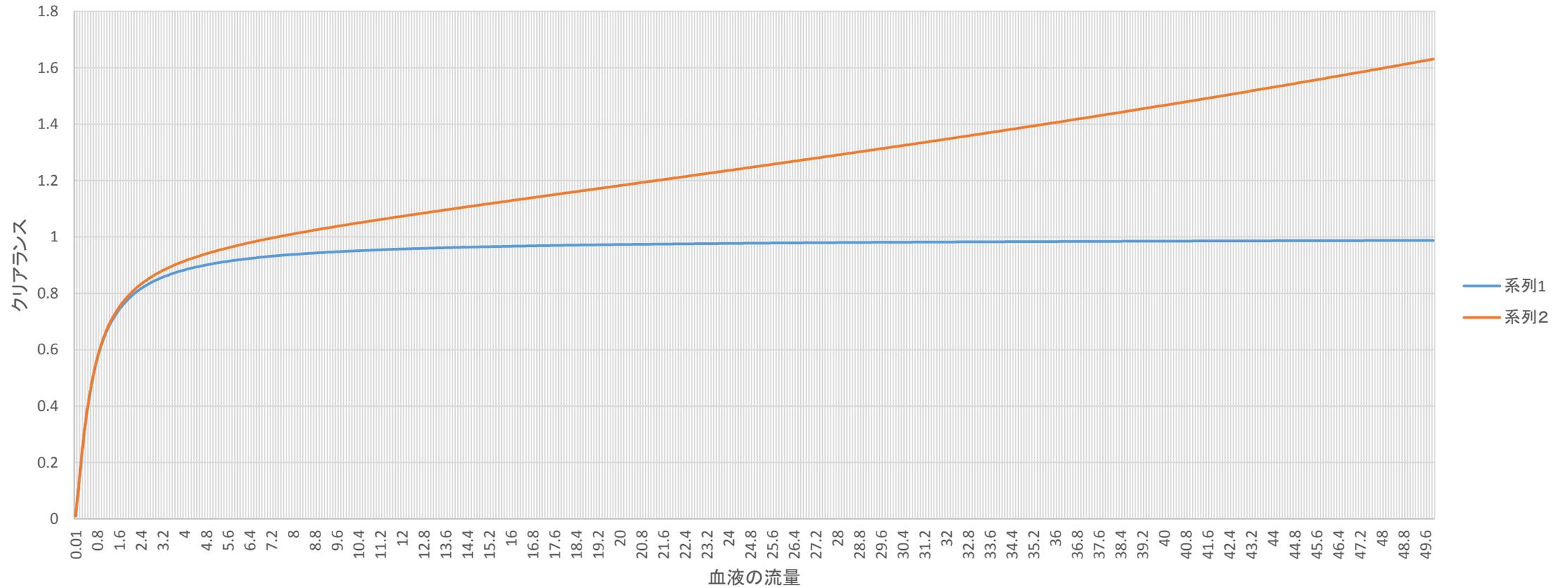
透析装置の構造

- 透析装置の内部



$$k = 1.00, L = 1.00, Q_D = 200$$

逆方向・順方向のクリアランス



$$kI/Q_D = 0.5, \quad Q_D = 200$$

逆方向・順方向のクリアランス

