

広告と売上の反応

北海道大学理学部数学科 2 年 佐藤 諒

時間と売上の関係

売上 (販売速度) S

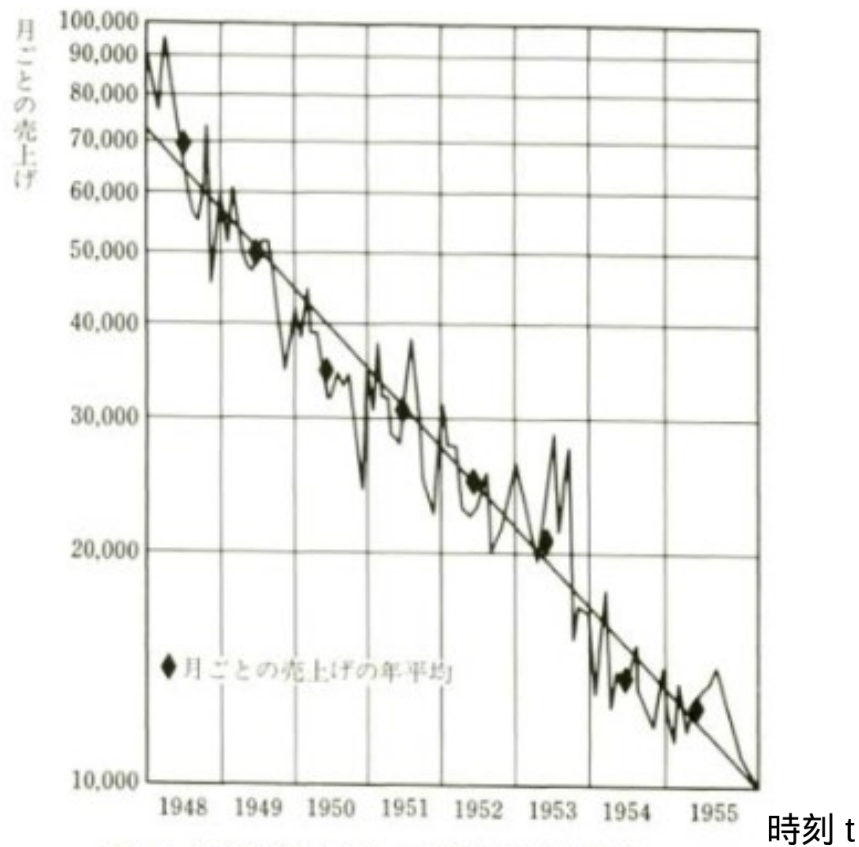


図 4.1 販売促進をしなかった製品の売上げ経過

売上 (販売速度) S

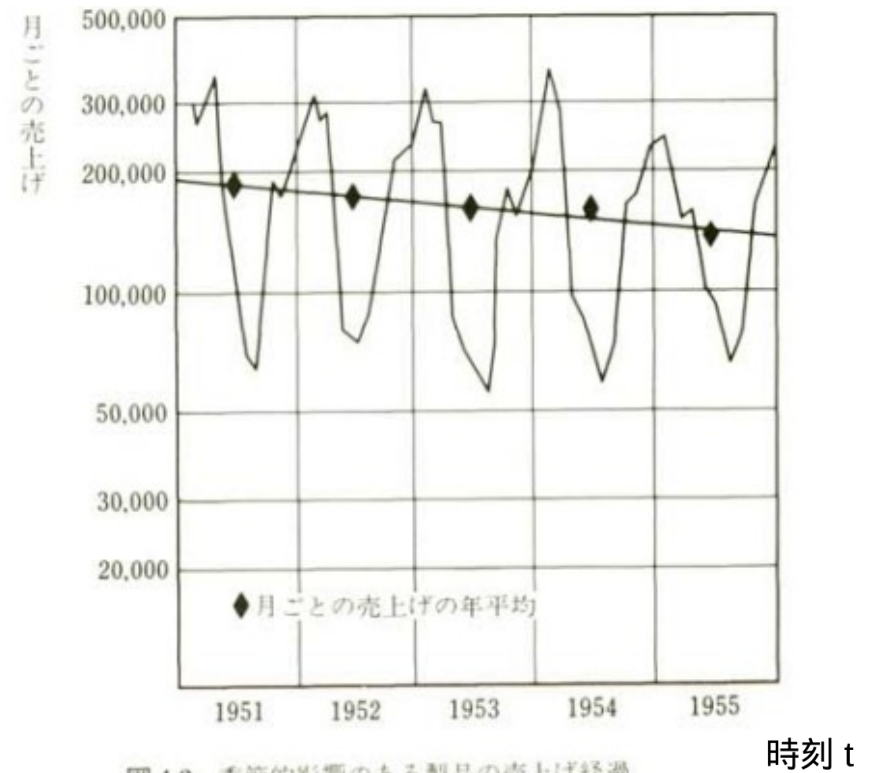


図 4.2 季節的影響のある製品の売上げ経過

時間と売上の関係

- S : 販売速度
- λ 、 μ : 正の定数
- t : 時刻

$$\log S = -\lambda t + \mu$$

$$dS/dt = -\lambda S$$

広告による影響

売上 (販売速度) S

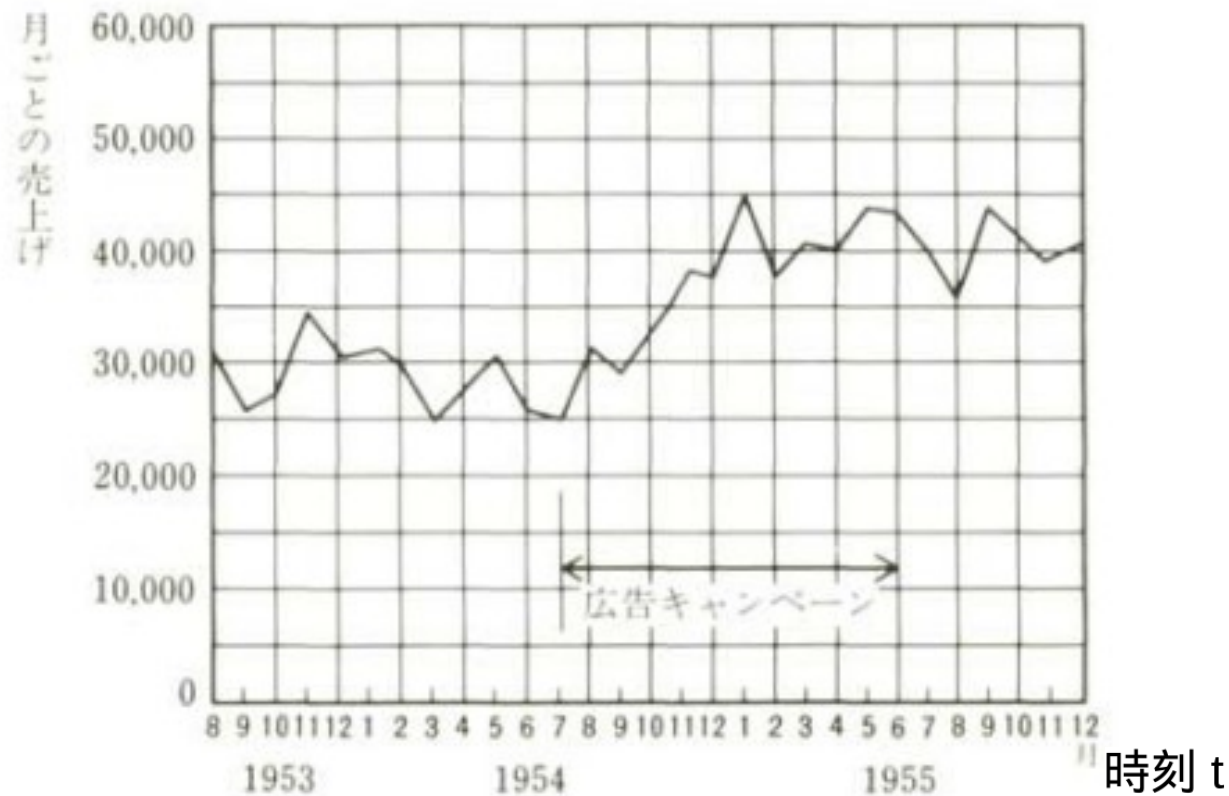


図 4.3 飽和水準を示す売上げ経過

広告による影響

- $A = A(t)$: 広告
- $(M-S)/M$: 飽和度 (M はありうる最大売上)
- r : 比例定数

$$dS/dt = rA(M-S)/M - \lambda S$$

微分方程式

$$\frac{dS}{dt} = rA(t)\left(1 - \frac{S}{M}\right) - \lambda S$$

$$\Leftrightarrow \frac{dS}{dt} + \left(\frac{rA(t)}{M} + \lambda\right) S = rA(t)$$

$$\text{両辺に } e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx} \text{ を掛ける}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx \right\} = \frac{rA(t)}{M} + \lambda \quad \#1$$

$$\text{(LHS)} = \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx} S \right) \text{ を掛ける}$$

$$\#2. \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx} S \right) = rA(t) e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx}$$

$$e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx} S = \int rA(t) e^{\int_0^t \left(\frac{rA(x)}{M} + \lambda\right) dx} dt$$

微分方程式

- 一般解

$$S = \left(\int rA(t) \exp(-\int(x:0 \rightarrow t) (rA(x)/m+\lambda) dx) dt \right) \\ * \exp(-\int(x:0 \rightarrow t) (rA(x)/m+\lambda) dx)$$

解の例

- 広告の普及率 A を

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A} & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (4.5)$$

と定めると

解は

$$S(t) = \begin{cases} S_0 e^{-(\lambda + r\bar{A}/M)t} + \frac{r\bar{A}}{(\lambda + r\bar{A}/M)} (1 - e^{-(\lambda + r\bar{A}/M)t}) \\ S_T e^{-\lambda(t-T)} \end{cases}$$

解の例

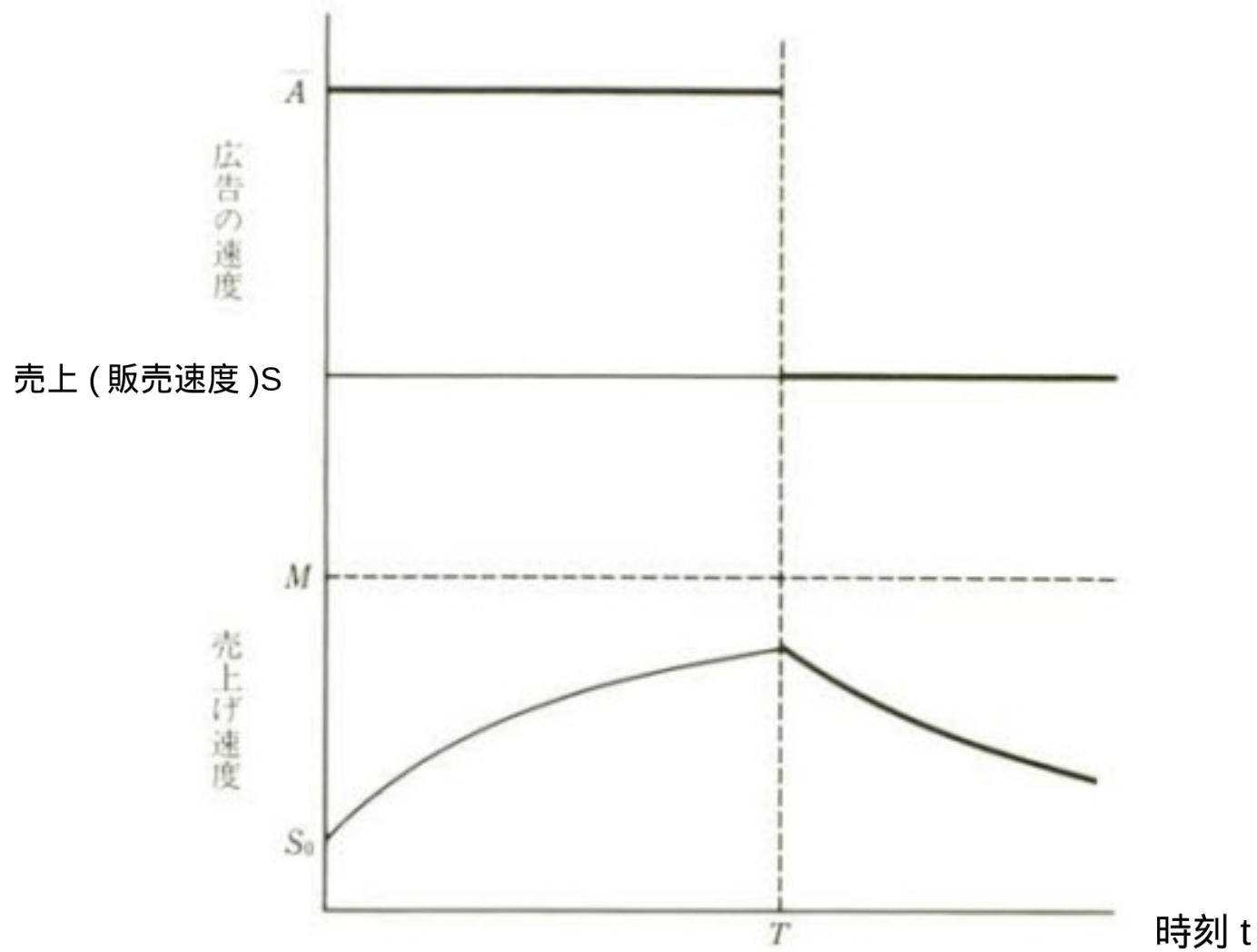


図 4.4 広告に対する売上げ反応の評価

比較

広告費が決まっていて売上をより大きくしたいという場合を考える。グラフの面積は売上の合計を表す。

つまり、時刻 $t=0$ からある時刻 $t=T$ まで広告を打つとき
 $\int_{(t:0 \rightarrow T)} A(t) dt = P$

となる場合を考える。

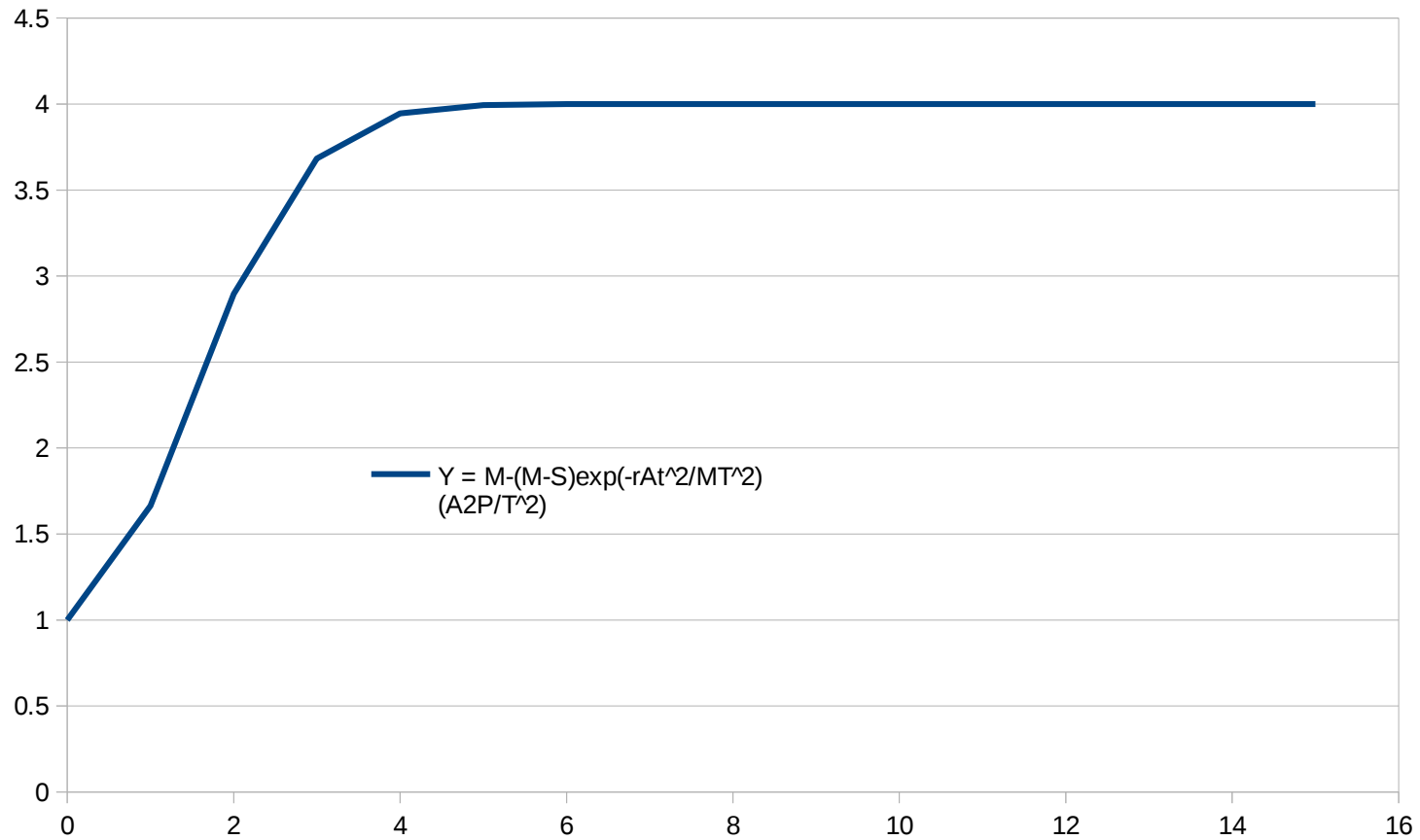
単純化のために、 $\lambda = 0$ とする。

$$A(t) = P/T \quad (\text{定数})$$

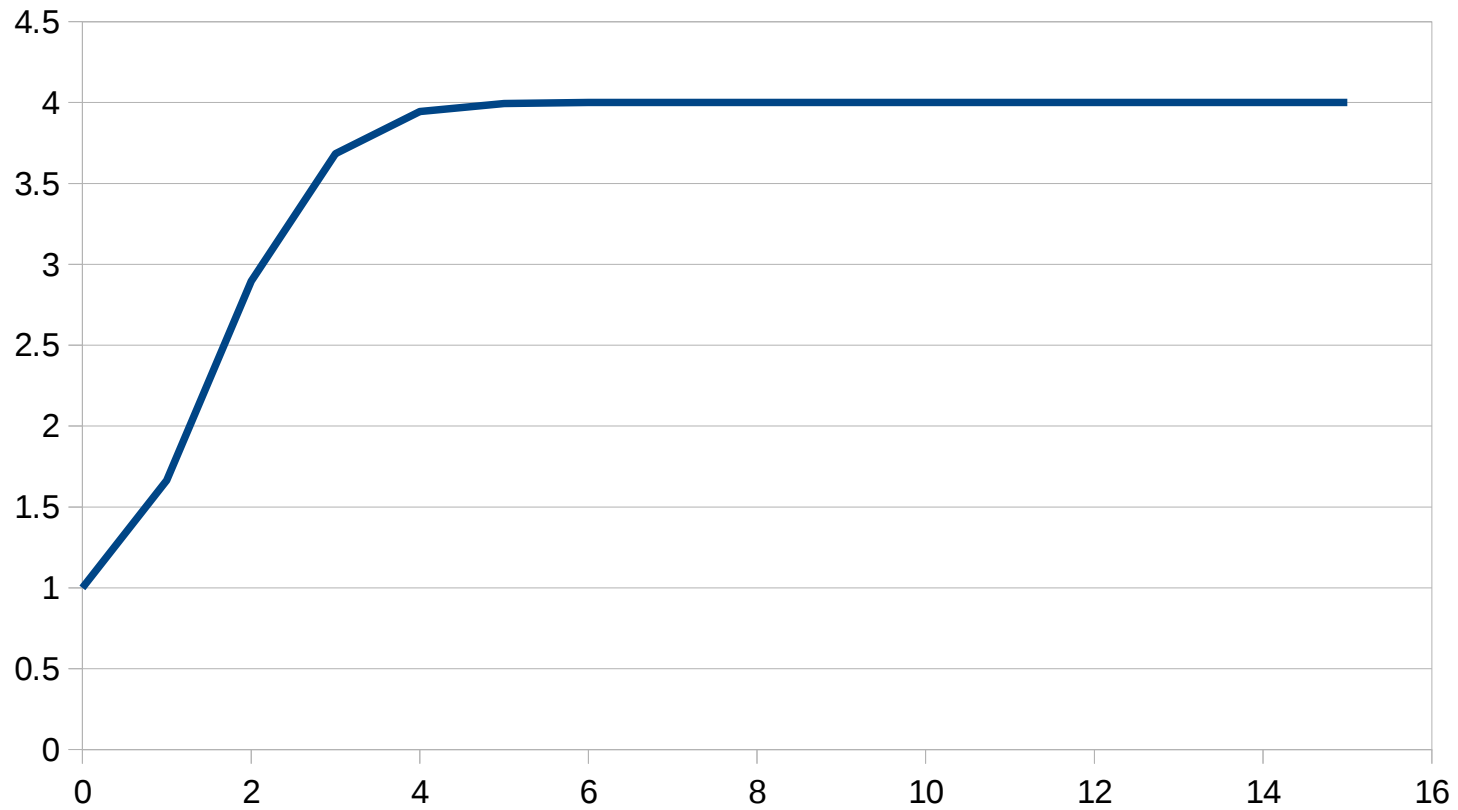
$$A(t) = 2P/T^2 \quad (\text{比例})$$

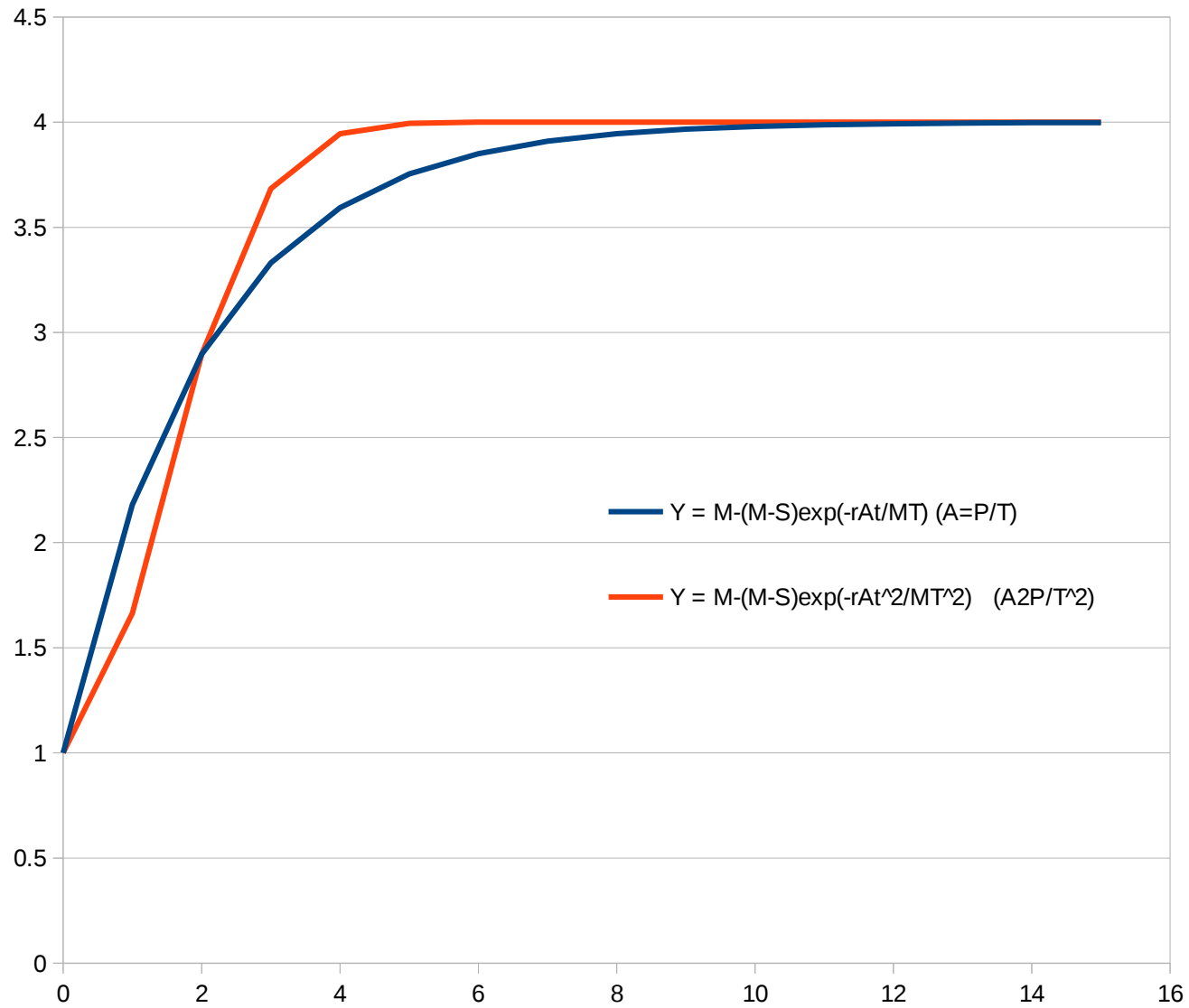
を比較してみる。

グラフ (A: 定数)



グラフ (A : 比例)





- $T = 2$ としてこのグラフを描いてみた。

グラフの面積が売上を表すのでこの場合では、 A は定数の方が売上が上がることが予想される。