Lotka-Volterra equations

～被食者・捕食者系の数理モデル～

東北大学理学部数学科１年　　深沢航平

1. Intro 予備知識

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y)\end{aligned}}$$

＊平衡点

$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right) = (0,0)$つまり$F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y}) = 0$を満たす$(\bar{x},\bar{y})$を平衡点という。

平衡点とは、時間的に変化しない状態にある点のこと。
平衡点近くでの軌道の振る舞いは、解に関する多くの情報を与える。

2. Example

2.1 Lotka-Volterra equation

$x = \#$ of preys $\qquad y = \#$ of predators

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x(a - by) & \cdots\cdots ① \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} = y(-c + dx) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① No predator ⇒ preys increase in proportion to a

Exist predator ⇒ preys decrease in proportion to b

② No preys ⇒ predators decrease in proportion to c

Exist preys ⇒ predators increase in proportion to d

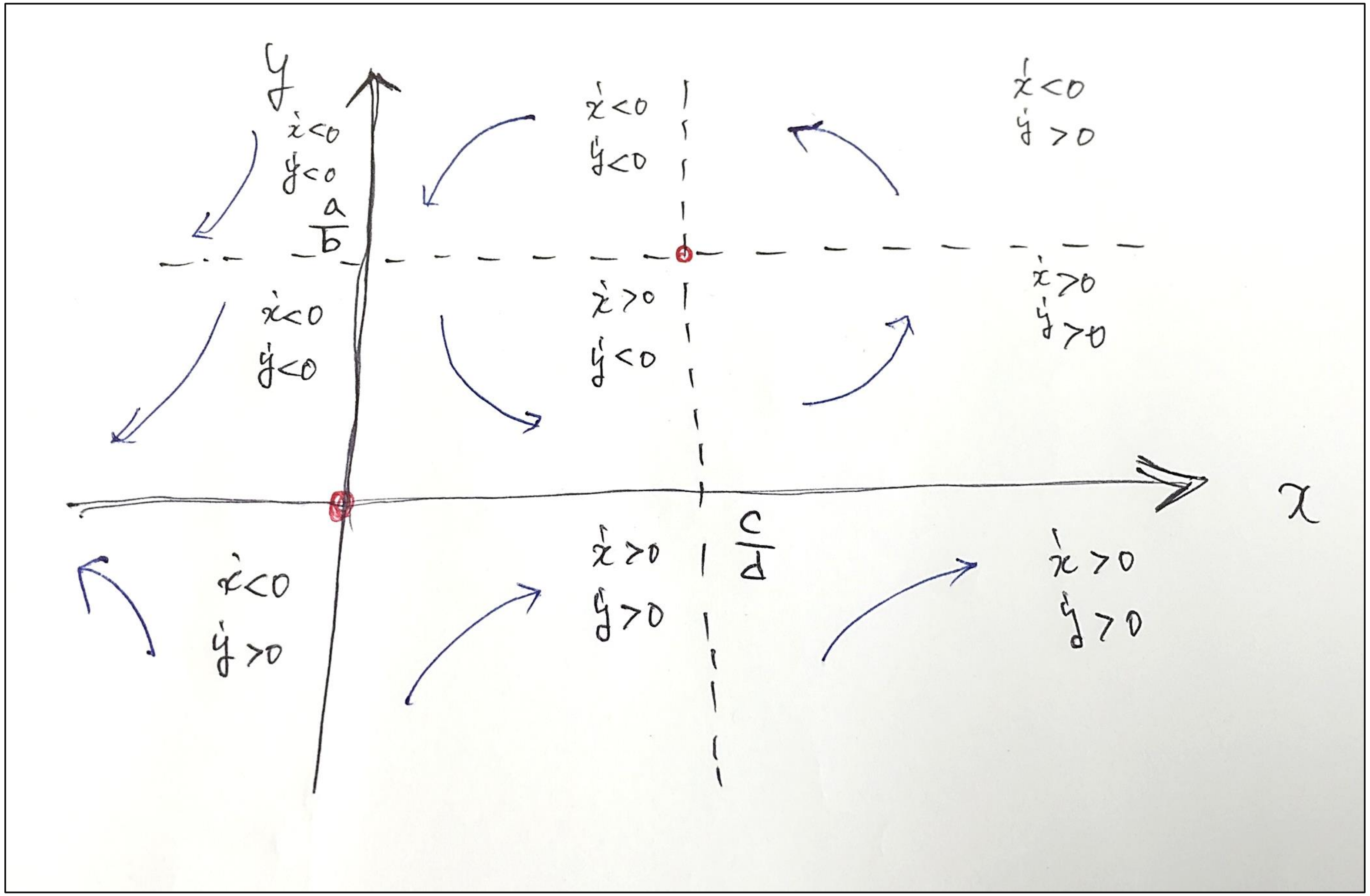
2.2 Analyze Lotka-Volterra equation

Ⅰ 平衡点

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x(a - by) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = y(-c + dx) \end{cases}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0) \;\; or \;\; \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Ⅱ グラフの外形



$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x(a - by) & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = y(-c + dx) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

それぞれの方程式を平衡点$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$の周りでテイラー展開し、式を簡潔化する。

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x\left(a - by\right) = -\frac{bc}{d}y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y\left(-c + dx\right) = \frac{da}{b}x$$

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$= F(0,0) + x\frac{\partial}{\partial x}F(0,0) + y\frac{\partial}{\partial y}F(0,0)$$

$+$ 高次の項

$x = Ae^{rt}$, $y = Be^{rt}$とすれば

$$Are^{rt} = -\frac{bc}{d}Be^{rt} \quad \Rightarrow rA = -\frac{bc}{d}B$$

$$Bre^{rt} = \frac{da}{b}Ae^{rt} \quad \Rightarrow \quad rB = \frac{da}{b}A$$

$\frac{A}{B}$を等しいとすると、２次方程式

$$r^2 + ac = 0$$

$$r = \pm\sqrt{ac}i \; (= \pm wi \text{とする})$$

$$\boxed{x = A_1e^{wit} + A_2e^{-wit} \quad , y = B_1e^{wit} + B_2e^{-wit}}$$

$$x = A_1 e^{wit} + A_2 e^{-wit}$$

$$= A_1(\cos wt + i \sin wt) + A_2(\cos wt - i \sin wt)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos wt + i(A_1 - A_2)\sin wt$$

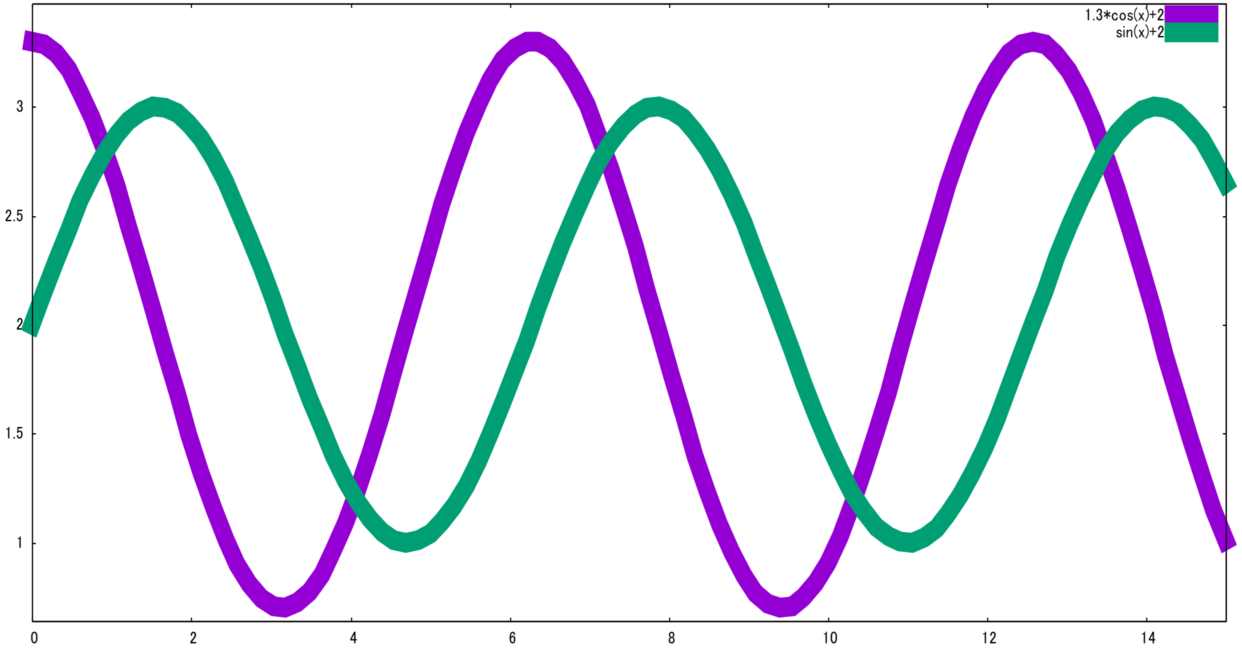
$A_1 + A_2 = A$,$i(A_1 - A_2) = B$ とする

$$= A\cos wt + B\sin wt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = A\cos wt + B\sin wt \\ y = \hat{A}\cos wt + \hat{B}\sin wt \end{array}}$$

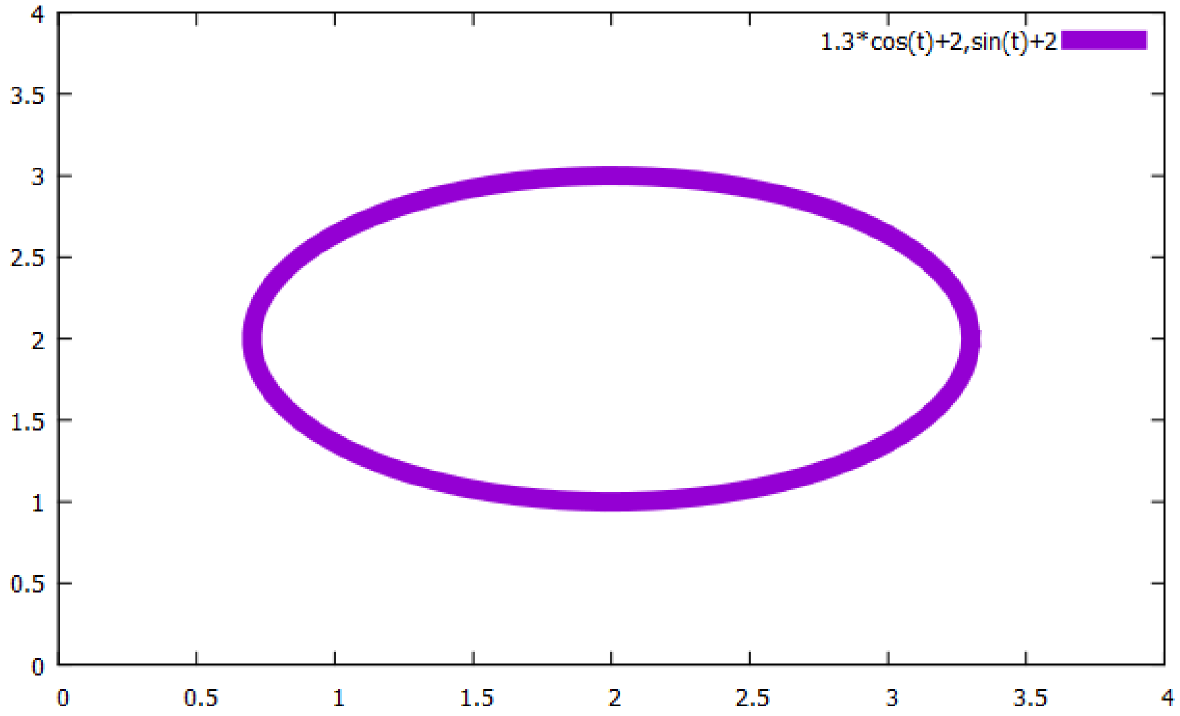
$$x(t) = A\cos wt + B\sin wt + u(0)$$

$$y(t) = \hat{A}\cos wt + \hat{B}\sin wt + v(0)$$



↑ x-t graph , y-t graph

↓ x-y graph



3. Further Activity

Q.　戦争時、漁師による漁業活動は数年間中断された。戦争後、大漁を期待して海に出た漁師であったが、実際は漁獲量が減少していた。これはどういうことなのだろうか？

サイクルの周期をTとすると、全サイクルにわたっての捕食者と被食者の平均値は次のように定義できる　：

x:イワシ　　y: サメ

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt\ , \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a - by$$

0〜T まで積分

$$\int_0^t \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^T (a - by)\,dt$$

$$\int_0^T \frac{1}{x}\,dx = aT - b\int_0^T y(t)\,dt$$

$$\log\frac{x(T)}{x(0)} = aT - b\int_0^T y(t)\,dt$$

完全なサイクルより $x(T) = x(0)$

$$\therefore\ 0 = aT - b\int_0^T y(t)\,dt$$

$$aT = b \cdot T\bar{y}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{a}{b}},\quad \boxed{\bar{x} = \frac{c}{d}}$$

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \quad , \quad \bar{y} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = x(a - by) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = y(-c + dx) \end{cases}$$

漁師による漁業活動はイワシの個体数を減らす。つまり、増加率が減少するので、

$$a \Longrightarrow a - k$$

イワシがへるとサメの減少率は増加

$$c \Longrightarrow c + m$$

すると、イワシとサメの個体数平均は

$$\bar{x} = \frac{c+m}{d} \quad , \quad \bar{y} = \frac{a-k}{b}$$

イワシは少し増加、サメは少し減少することがわかる。

戦争により漁業活動が中断されている間、これと逆のことが起こり、サメは増加し、食用魚が減少したというわけ。

＊　テイラー展開による近似

平衡点による近似をする。

平衡点を$(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$と仮定する。（これは一般性を失わない）

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) = F(0,0) + x\frac{\partial}{\partial x}F(0,0) + y\frac{\partial}{\partial y}F(0,0) + \text{高次の項}$$

$\mathrm{F}(0,0) = 0$ ， $\frac{\partial}{\partial x}F(0,0) = a$ ， $\frac{\partial}{\partial y}F(0,0) = b$, 高次の項を無視すると

$$\frac{dx}{dt} \approx ax + by$$

同様にして

$$\frac{dy}{dt} \approx cx + dy$$

$$\frac{dx}{dt} \approx ax + by \qquad \frac{dy}{dt} \approx cx + dy$$

$x = Ae^{rt}, y = Be^{rt}$とすれば

$$Are^{rt} = aAe^{rt} + bBe^{rt} \;\Rightarrow\; (r-a)A = bB$$

$$Bre^{rt} = cAe^{rt} + dBe^{rt} \;\Rightarrow\; (r-d)B = cA$$

$\frac{A}{B}$を等しいとすると、２次方程式

$\boxed{r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0}$ （固有方程式）が得られる。

この解を$r = (r_1, r_2)$とすると、一般解は

$$\boxed{x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad , y = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}}$$