波動方程式とは.

波動現象を一般的に表す関係式のこと.

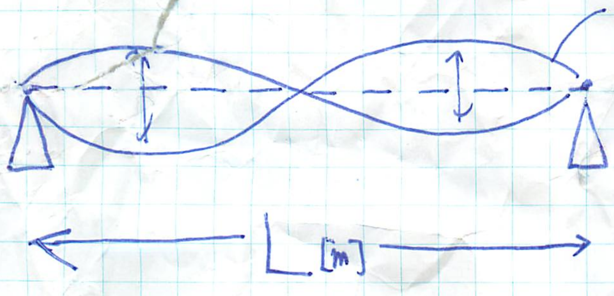
1. 波動方程式の導出について.

弦の振動を考える. [i] ギターには6本の弦があり太さが異なっている. ⇒ ρ [g/m] とする. 線密度という.

[ii] ギターには張力を調整する機構がついている.

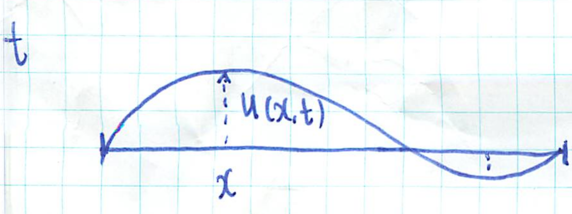
⇒ T [N] とする.

[iii] ギターには馬向(こま)がついており, 振動する弦の長さを調整することができる ⇒ L [m]



弦の振動を表すために変位を $u(x, t)$ とする.

$u(0, t)$, $u(L, t)$ とは 時刻 t における いちばん両端の弦の状態を表す.



2. 波動方程式の初期・境界条件

A …… $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ …… 境界での値

B …… $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ …… 内部で成立する式

C …… $u(x,0)=f(x)$ …… 初期の弦の形状

D …… $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ …… 初期の弦の形状の時間変化率

A, B, C, D の 4つの条件が適切に揃った時, 解がユニークに存在する.

因みに, A の条件は他にもある.

(i) $u(0,t)=\alpha$, $u(L,t)=\beta$ ← 境界での値を指定 (ディリクレ境界条件) 固定端

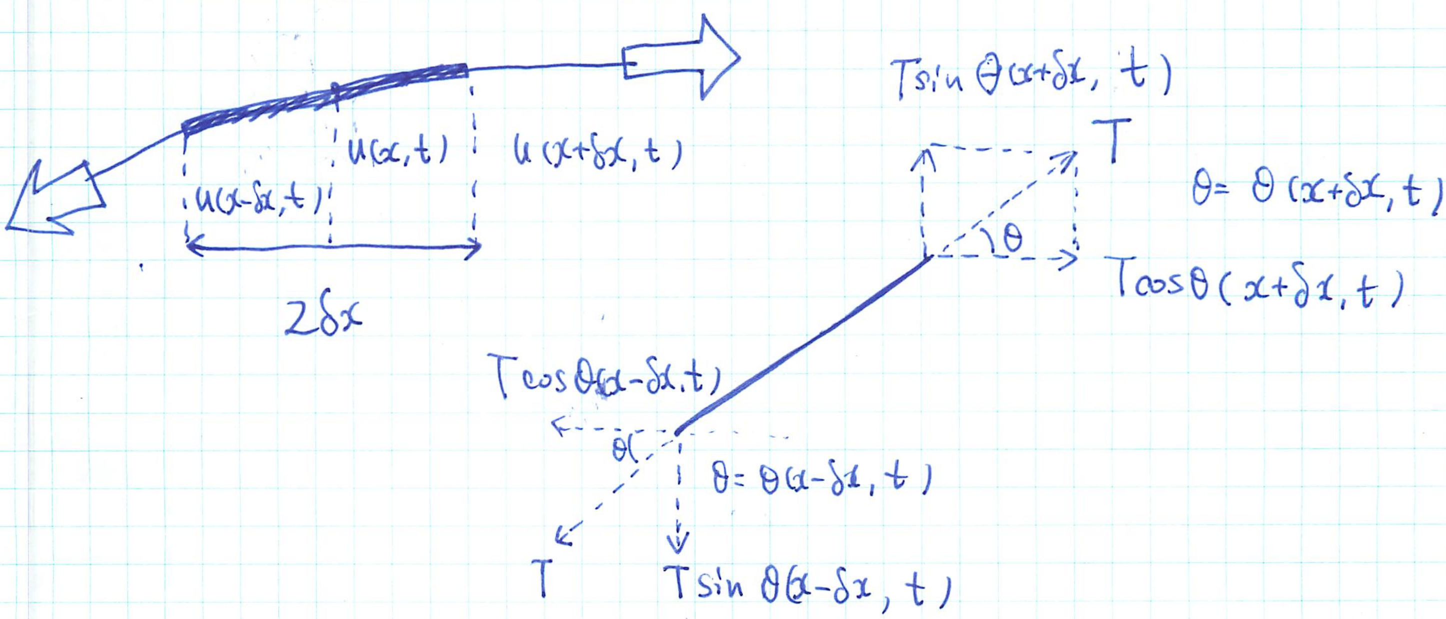
(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\alpha$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=\beta$ ← 境界での弦の傾きを指定 (ノイマン境界条件) 自由端

(iii) $u(0,t)=u(L,t)$ ← 境界が周期的につながっている. (ペリオディック境界条件) 周期境界条件

ギターの駒の部分では弦の振動は止まっている

$\Longrightarrow \forall t,\ u(0,t)=0\ ,\ u(L,t)=0\ ,\ \cdots\cdots(A)$

弦の満たす方程式は何だろうか？ 運動方程式を立てることによって導くの



$m\vec{a}=\vec{F}$ （ニュートンの運動方程式）

弦は上下方向にのみ運動をするので
垂直方向の運動方程式を立てる。

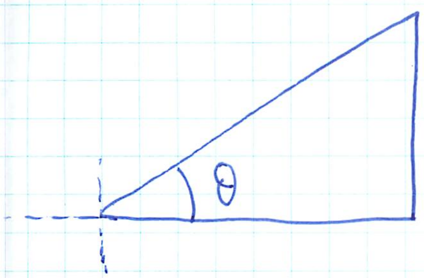
(☆) $\rho\cdot\delta x\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = T\sin\theta(x+\delta x,\ t) - T\sin\theta(x-\delta x,t)$

θの式をuの式で表したいので θとuの関係を考える。

θが十分小さい時、次式が成立する。

$\sin\theta \approx \theta\ ,\quad \tan\theta\approx\theta$

よって $\sin\theta \approx \tan\theta$ としてよい． (θが十分小さい時は!)



また $\tan\theta(x\pm\delta x, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x\pm\delta x, t)$ なので

(☆)は次のようになる．

(☆☆) $\rho \cdot 2 \cdot \delta x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T\dfrac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x, t) - T\dfrac{\partial u}{\partial x}(x-\delta x, t)$

さて なめらかな関数 G に対して，テーラー展開を用いて

$$G(x+\delta x) = G(x) + \frac{dG}{dx}\cdot\delta x + \frac{d^2G}{dx^2}\cdot\frac{\delta x^2}{2} + O(\delta x^3)$$

$$G(x-\delta x) = G(x) - \frac{dG}{dx}\cdot\delta x + \frac{d^2G}{dx^2}\frac{\delta x^2}{2} + O(\delta x^3)$$

↑ 引数をわすれず．

より

$G(x+\delta x) - G(x-\delta x) = 2\delta x\cdot\dfrac{dG}{dx} + O(\delta x^3)$ となる．

G に $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を代入して，☆☆を整理すると．

$$2\cdot\rho\cdot\delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T\cdot 2\delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$ ← δx^3は無視

よって $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{T}{\rho}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ となる

$c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ とおく．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \cdots B$$

(ギターの音の高さなどのはなしをする)

3 波動方程式の解について

$u_1(x,t)=\cos\frac{ct}{2}\sin\frac{x}{2}$, $t\geq 0$, $0\leq x\leq 2\pi$ について.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=-\left(\frac{c}{2}\right)^2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}$$ より. Bをみたす.

$$u_1(0,t)=\cos\frac{ct}{2}\sin\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$u_1(2\pi,t)=\cos\frac{ct}{2}\sin\cdot\frac{2\pi}{2}=0$$

よって Aをみたす.

$$u_1(x,0)=\cos\frac{c0}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$$

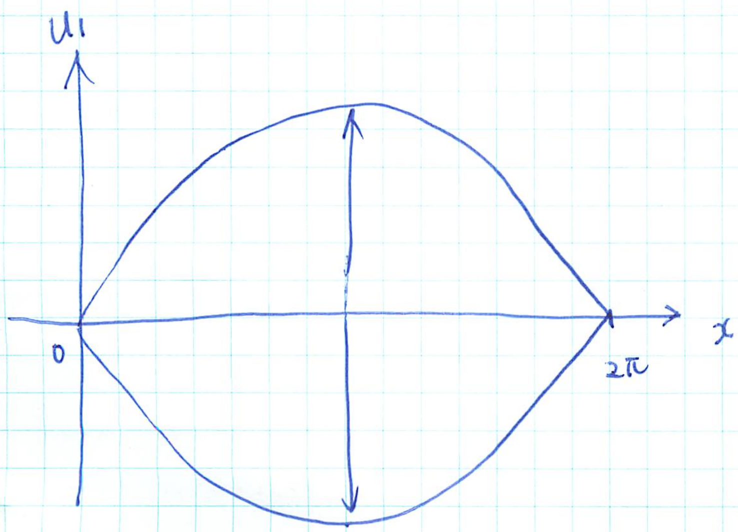
よって $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ とおけば Cを与える.

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0}=\left.-\frac{1}{2}\sin\frac{ct}{2}\sin\frac{x}{2}\right|_{t=0}=0$$ より

$g(x)=0$ となる. よって Dを与える.

また, $u_1(0,t)=0$, $u_1(2\pi,t)=0$ より Aをみたす.

よって. u_1は A〜D を満たす. u_1の概形は以下のようになる.



問題　特別な初期値に対する解について

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ t>0 \\
u(0,t) = u(l,t) = 0 & t>0 \\
u(x,0) = \sin\dfrac{\pi m x}{l} & (m=1,2,\cdots) \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0
\end{cases}
$$

を満たす解を求めよ．

ヒント．$u_m(x,t) = a_m(t)\cdot \sin\dfrac{\pi m x}{l}$ という $\underbrace{\text{解}}_{\text{の形}}$ を仮定する．

$a_m(t)$ の満たす方程式を考える．

解．

$$a_m''(t)\cdot\sin\frac{\pi m x}{l} = -c^2\cdot\left(\frac{\pi}{l}m\right)^2 a_m(t)\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}$$

$a_m(0) = 1,\quad a_m'(0) = 0$ となる．

$$a_m''(t) = -\left(\frac{\pi m c}{l}\right)^2 a_m(t)$$

これをといて，$a_m(t) = \cos\dfrac{\pi m c t}{l}$ である

よって．$u_m(x,t) = \cos\dfrac{\pi m c t}{l}\cdot\sin\dfrac{\pi m x}{l}$ となる

問題

さきほどの問題の境界条件，初期条件は少し変更して

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0, \quad t>0$$

$$u(x,0)=\cos\frac{\pi m x}{l} \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$ とする.

解を求めよ.

解 $u_m(x,t)=a_m(t)\cdot\cos\frac{\pi m x}{l}$ とおく.

$$a_m''(t)=-\left(\frac{\pi m c}{l}\right)^2 a_m(t)$$

$a_m'(0)=0, \quad a_m(0)=1$ より

$$a_m(t)=\cos\frac{\pi m c t}{l}$$

よって $u_m(x,t)=\cos\frac{\pi m c t}{l}\cos\frac{\pi m x}{l}$

グラフをみせる.

4. 波動方程式の解と 解の重ね合わせ.

命題. 「A〜Dを満たす解を u_p, u_q とおく. このとき

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $u_r := a u_p + b u_q$ も解となる.」

u_r が A〜D を満たすことを確認する.

たとえば B ならば

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + b\cdot\frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2}$$

$$= a c^2 \frac{\partial^2 u_p}{\partial x} + b\cdot c^2\cdot\frac{\partial^2 u_q}{\partial x} = c^2\cdot\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}$$ などとなる.

問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & , 0<x<l, t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = \sin\dfrac{2\pi x}{l} - 3\sin\dfrac{4\pi x}{l} + 5\cdot\sin\dfrac{6\pi x}{l} & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \end{cases}$$

の解を求めよ!

解 $u(x,0) = \sin\frac{m\pi x}{l}$ に対する解は $u_m(x,t) = \cos\frac{\pi mct}{l}\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}$

なので, 求める解は.

$$u(x,t) = u_2(x,t) - 3u_4(x,t) + 5\cdot u_6(x,t)$$ となる.

「よって初期値をフーリエ級数展開するなどして, かんたんなmモード解として. 分解することで

解を求めることができる」

5. 波動方程式の進行波解.

境界条件を なくし ℝ全体で波動方程式を考える.

すなわち.

$$
* \cdots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}
$$

という初期値問題を考える.

$u_r(x,t) = f(x-ct)$ と $u_\ell(x,t) = f(x+ct)$ は $(*)$ の解である.

$$
\left(\because \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= f''(-c)^2 = c^2 f'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f'' \end{aligned} \right)
$$

よって. $u(x,t) = A u_r(x,t) + B u_\ell(x,t)$ も解である.

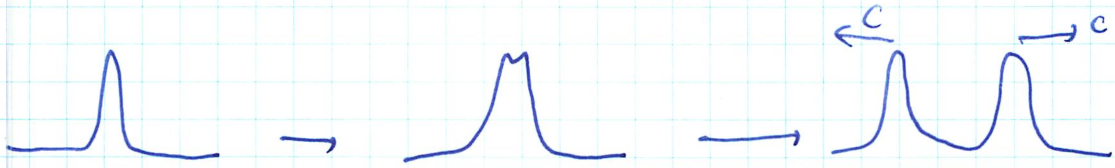
$t=0$ を代入して. $f(x) = A f(x) + B f(x)$

t で微分して、$t=0$ を代入して,

$$
\begin{aligned} 0 &= -cAf'(x-ct) + cBf'(x+ct)\Big|_{t=0} \\ &= -c(A-B)f'(x) \end{aligned}
$$

よって $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases}$ これをといて. $A = B = \dfrac{1}{2}$

よって $u(x,t) = \dfrac{1}{2}f(x-ct) + \dfrac{1}{2}f(x+ct)$ は解.



グラフをみせる

(**)

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ に対する条件を一般化し，以下の問題を考える．

$$(**)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

問題　$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$

が (**)の解であることを示せ!!

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f(x) + \frac{1}{2c}\cdot\int_x^x g(y)dy = f(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}cf'(x-ct) + \frac{1}{2}cf'(x+ct) + \frac{1}{2c}\left(\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\right)_t$$

$$\left(\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy\right)_t = \left(\int_0^{x+ct} g(y)dy\right)_t - \left(\int_0^{x-ct} g(y)dy\right)_t$$

$$= c\,g(x+ct) - (-c)\,g(x-ct)$$

よって．$t=0$ を代入して．$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(f'(x+ct) - f'(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2}\left(f''(x+ct) + f''(x-ct)\right) + \frac{c}{2}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}f'(x-ct) + \frac{1}{2}f'(x+ct) + \frac{1}{2c}\left(g(x+ct) - g(x-ct)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}f''(x-ct) + \frac{1}{2}f''(x+ct) + \frac{1}{2c}\left(g'(x+ct) - g'(x-ct)\right)$$

よって　$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が成立する．

波動方程式と保存量

$$E = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$ はディリクレ条件 or

ノイマン条件の時, 保存される.

$(\because)$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^l \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^l \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) dx$$ ($\int$ と $\frac{d}{dt}$ の交換にちゅうい)

$$= \int_0^l u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}\, dx$$

$$= \int_0^l c^2 u_t u_{xx} + c^2 u_x u_{xt}\, dx$$

$$= c^2 \int_0^l u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\, dx$$

$$= c^2 \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x)\, dx = c^2 \left[u_t u_x \right]_0^l$$

さて, ノイマン条件のとき $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$ より

$$(\text{上式}) = c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}_{\text{こっちが}0} \right]_0^l = 0$$

ディリクレ条件のとき, $u(0,t) = u(l,t) = 0$ より

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$

よって (上式) $= 0$ となる.

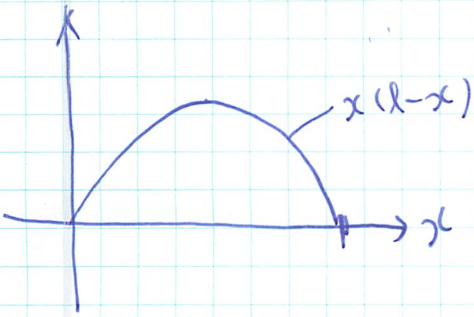
波動方程式とフーリエ級数

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = x(l-x)$$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ のとき、解 u を求めよ!!



$$x(l-x) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^3} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

まず nモード解 u_n は $u_n = \cos\dfrac{\pi n c t}{l} \sin\dfrac{\pi n x}{l}$ である.

よって解は

$$u(x,t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^3} \cdot \cos\frac{\pi n c t}{l} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

となる.