ＦＤＴＤ解析法（Matlab版、１次元）プログラム解説 v1.01

１．概要

このプログラムコードは有限差分時間領域法（Finite-Difference Time-Domain Method, ＦＤＴＤ法）の原理とアルゴリズムを、できるだけ簡単に理解することを目的として、１次元空間における電磁波の伝搬を解析したものである。ここでは、ｚ軸上のある点から励起された電磁波が伝搬する様子を、マクスウェル方程式を直接解くことにより求めており、電界と磁界の時間変化をアニメーションで表示する。計算結果の時間信号からフーリエ変換により周波数スペクトルを求め、それぞれをグラフに出力する。

２．FDTD法の原理

電界 E および電流源 J（ただし電流密度で定義）がｘ方向($E = E$x, $J = J$x)、磁界 H がｙ方向を向いており($H = H$y)、これらが±ｚ方向に伝搬する場合を考える。これは１次元媒質のマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial z} = -\mu_r \mu_0 \dfrac{\partial H}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} - \sigma E - J \end{cases} \quad (1)$$

で表され、これは電信方程式ともよばれるが、この連立方程式を差分近似すると

$$\begin{cases} \dfrac{E_{k+1}^{n} - E_{k}^{n}}{\Delta z} = -\mu_r \mu_0 \dfrac{H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} \\ \dfrac{H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{E_{k}^{n+1} - E_{k}^{n}}{\Delta t} - \sigma \dfrac{E_{k}^{n+1} + E_{k}^{n}}{2} - J_{k}^{n+1/2} \end{cases} \quad (2)$$

となる。ここでΔzはYeeセルの大きさ、すなわち空間ステップであり、Δtは時間ステップ（繰り返し計算における微小時間間隔）を表す。ｋはｚを離散化した時の空間の位置を表す指標（空間インデックス)、すなわちＥやＨのサンプル点が何番目であるかを表し、ｎは現時点の時間が何番目であるか（すなわち、時間インデックス）を表す。この連立差分方程式を E と H について交互に計算する。すなわち、

$$\begin{cases} H_{k+1/2}^{n+1/2} = H_{k+1/2}^{n-1/2} - \dfrac{\Delta t}{\mu_r \mu_0} \dfrac{E_{k+1}^{n} - E_{k}^{n}}{\Delta z} \\ E_{k}^{n+1} = \dfrac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 - \sigma \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma \Delta t} E_{k}^{n} - \dfrac{2\Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma \Delta t} \left(\dfrac{H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} + J_{k}^{n+1/2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

と書き換える。これらの方程式を用いて、最新の時間の磁界 $H_{k+1/2}^{n+1/2}$ についてまず計算し、その次

の時間における電界 E_k^{n+1} を計算する。さらに次の時間ステップにおける磁界、またさらに次の電界と、この計算を繰り返し、磁界と電界の時間変化を順次計算してゆく。この手法はリープフロッグ（leapfrog, カエルとび、交互前進）アルゴリズムまたは時間進展（time marching）アルゴリズムと呼ばれる。これにより電磁界の時間的な変化の様子を実際に実験室において再現するように解析することができる。

３．プログラムコードの構成

このプログラムの構成は、次のような流れになっている。

プログラム FDTD_1D
　計算条件設定
　｜
　時間進展ループの計算と結果表示
　｜
　時間信号と周波数スペクトルのファイルへの書き出しとフーリエ変換

主要な変数は次のようになっている。また、他の変数はプログラム中に説明されている。本プログラムでは物理定数は規格化しないで SI 単位系の値 $\varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}$ F/m、$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m、E [V/m]、H [A/m]を用いている。

　配列 v：電界 E と磁界 H を格納
　配列 s：励起パルス源（電流密度 J）の与えられる位置で 1、他の位置で 0 とする。
　k： z 方向の電界と磁界の位置インデックス
　n：時間を表す指標（時間インデックス）

４．プログラム各部の説明

本プログラム（FDTD_1D）は計算条件の設定、時間進展（time marching）アルゴリズムの実行を行い、その結果を表示あるいはファイルへの保存を行う。その他の変数の定義は煩雑になるので省略するが、プログラムコードの中で説明されている。

ａ．計算領域

計算領域の定義を下図に示す。電界 E の隣接する 2 点間を単位 Yee セルとし、電界の間に磁界をとるように空間を離散化する。ここでの境界条件は、両端の電界が金属表面上にあるとしているので $E=0$ となっている。ただし、プログラムでは E と H は同じ配列 v(k)に格納されており、指

標 k は式（２）や（３）では整数および半整数であるが、これらの k をすべて２倍して整数化している。したがって、配列 v は、k が偶数のとき E、奇数のとき Hを表す。

```
                 unit Yee cell
                 |<--->|
         H:    |-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
         E: |-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
         J: |-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----|
            |  |  |                                               |  |  |
           KL    KLP2                                          KUM2    KU
             KLP                                                  KUM
            |<-------------------- KD (Max: 205) ------------------->|
   index k: 0--1--2--3--4--5--6--7--8--9-----
```

まず始めに計算条件の設定を行う。

- kd は空間分割数であり、Yee 格子の数×２の数値を設定する。
- zmax は計算領域の長さであり、単位はｍである。
- er, mr はそれぞれ共振器内の媒質の比誘電率、比透磁率であり、１のときは真空あるいは空気中を意味する。
- sg は導電率であり、０または有限の値を設定することができる。
- 励起は計算領域の任意の点で所望の振幅（初期設定では１）で与えられる。
- 電界の時間変化データをとる位置は kdtct で設定する。ただし、このときセルの番号を使用する。この番号には形式的に kl を加えて分かりやすくしておく。kl は第１番目のセルの番号であり本プログラムでは３としている。
- dz は単位 Yee セルの長さである。
- dt は規格化された時間ステップであり、最大許容値は１次元プログラムでは dz となる。これは差分法における Courant 条件と呼ばれる。
- nmax は FDTD 時間進展計算のうち、E と Hの組の繰り返し計算回数。
- freq は励起パルスの中心周波数。

ｂ．時間進展方程式

以上の計算条件の設定後、FDTD 時間進展計算のための係数 c0, ce, cs, cm を計算し、その後に FDTD 時間進展計算を始める（START TIME MARCHING ARGOLITHM 以下)。ただし係数の定義については、上記の式（３）を

$$\begin{cases} H_{k+1/2}^{n+1/2} = H_{k+1/2}^{n-1/2} - C_m\left(E_{k+1}^{n} - E_{k}^{n}\right) \\ E_{k}^{n+1} = C_0 E_{k}^{n} - C_e\left(H_{k+1/2}^{n+1/2} - H_{k-1/2}^{n+1/2}\right) - C_s S_t J_{k}^{n+1/2} \end{cases} \qquad (4)$$

のように書き換え、

$$\begin{cases} C_0 = \dfrac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 - \sigma\Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \\ C_e = \dfrac{2\Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \cdot \dfrac{1}{\Delta z} \\ C_s = \dfrac{2\Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \\ C_m = \dfrac{\Delta t}{\mu_r \mu_0} \cdot \dfrac{1}{\Delta z} \end{cases} \quad (5)$$

としている。これにより、係数を FDTD 時間進展計算の前に一度だけ求め後は同じ係数を繰り返し使用でき、効率的に計算を進めることができる。S_t は励起パルスの時間変化を設定するための係数である。FDTD 時間進展計算については、n を時間ステップ数とし、これを 1 から nmax まで DO ループで繰り返す。N の DO ループ内では、まず励起のための電流源の時間変化を変数 st に代入し、次に上記の E と H の計算を行う。

ｃ．結果の処理とフーリエ変換

FDTD 解析結果の信号の時間変化を拾い出し配列に蓄える。これらの時間データは繰り返し計算において毎回蓄えられるため、データは nmax 個である。また、励起信号は tx に、電界の時間変化は k = kdtct 番目の位置における v の値を tv に蓄える。時間進展計算が終了した後、vt に蓄えられた時間信号を表示する。また、この時間信号からフーリエ変換によって周波数スペクトルを計算し表示する。

５．まとめ

本プログラムコードは FDTD 法の最も簡単なものであり、２次元、３次元問題への拡張もこの考え方に基づいて行われる。本コードは電界 E と磁界 H を格納する配列 v が一つだけであることが特徴である。これは３次元問題の場合若干メモリを無駄にすることになるが、プログラムコードを様々な観点から拡張する際非常にシンプルに行えるという利点があり、特に並列コードの作成の際に複雑な構成の配列を取り扱う必要がない点で効果的である。現在、我々が種々の解析に応用している３次元並列フォートランプログラムはこの方針に基づいて書かれている。