

FDTD解析法（Matlab 版、2次元PML）プログラム解説 v2.11

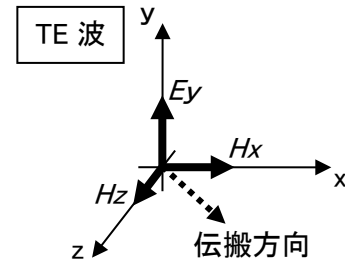
1. 概要

FDTD解析における吸収境界である完全整合層（Perfectly Matched Layer, PML）の定式化とプログラミングを2次元TE波について解説する。PMLは異方性の損失をもつ仮想的な物質であり、侵入して来る電磁波を逃さず吸収する。通常物質と接する界面でインピーダンスが整合しており、反射波が生じないという優れた特徴をもつ。PMLを利用することにより、FDTD解析において問題となる解析領域端での反射波の影響を除くことが可能となり、解析精度を大きく改善し、様々な電磁波問題を解くことができる。

2. 2次元TE波におけるPMLの定式化

ここでは、2次元TE波についてのマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + J_y \\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$



に対応するPMLの定式化を行う。PML媒質内では通常の導電率 $\sigma=0$ とし、その代わりに以下の異方性テンソルで表される損失項を導入する。

3次元空間におけるPMLのためのマクスウェル方程式が、異方性PMLのテンソル $\bar{s}$ を用いて次式で与えられていることを前提とする。（この原理を理解するためには、Berengerの電磁界分離によるPML定式化等を参照されたい。）すなわち、

$$\text{Ampere の法則 : } \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \bar{s} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2a)$$

$$\text{Faraday の法則 : } \nabla \times \vec{E} = -\mu_r \mu_0 \bar{s} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2b)$$

ただし、 ε_0 は真空の誘電率、 ε_r は通常媒質の比誘電率であり、テンソル $\bar{s}$ は

$$\bar{s} = \bar{\varepsilon} = \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

と表される。 $\bar{s}$ の要素における

$$s_\xi = \kappa_\xi + \frac{\sigma_\xi}{j\omega\varepsilon_0} = \kappa_\xi + \frac{\sigma_\xi^*}{j\omega\mu_0}, \quad \xi = x, y, z \quad (4)$$

は複素比誘電率に相当する物理量であり、ここでPML媒質定数を次のように定義する。すなわち、 κ_ξ をPML媒質の等価比誘電率、 σ_ξ をPML媒質の電氣的な等価導電率、 σ_ξ^* をPML媒質の磁氣的な等価導電率とする。このような媒質定数により電磁波の伝搬方向によって損失（減衰）が異なる状況を実現する（異方性損失）。PMLでは周波数分散がゼロとなる条件（伝搬波形がひずまない「無ひずみ条件」）

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (5)$$

が成立していることで、周波数に依存しない吸収媒質を実現する。さらに、PML媒質の誘電体としての構成方程式を

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{s_z}{s_x} E_x \\ D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{s_x}{s_y} E_y \\ D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{s_y}{s_z} E_z \end{cases} \quad (6)$$

および、磁性体としての構成方程式を

$$\begin{cases} B_x = \mu_0 \mu_r \frac{s_z}{s_x} H_x \\ B_y = \mu_0 \mu_r \frac{s_x}{s_y} H_y \\ B_z = \mu_0 \mu_r \frac{s_y}{s_z} H_z \end{cases} \quad (7)$$

と置く。以上の関係から 3 次元空間における定式化を行い、最終的にそれらの方程式から 2 次元 T E 波の方程式 (1) すなわち、電磁界成分 (E_y, H_x, H_z) に相当する方程式を抽出することとする。

Ampere の法則(2a)を直角座標系において書き下す。まず、角周波数 ω である電磁波について

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} &= j\omega\epsilon_r\epsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} E_x \\ \frac{s_z s_x}{s_y} E_y \\ \frac{s_x s_y}{s_z} E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \\
 &= j\omega \begin{bmatrix} s_y D_x \\ s_z D_y \\ s_x D_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} \\
 &= j\omega \begin{bmatrix} k_y D_x \\ k_z D_y \\ k_x D_z \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \sigma_y D_x \\ \sigma_z D_y \\ \sigma_x D_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8}$$

と書けるが、この式を逆フーリエ変換によって時間に関する微分方程式に変換する。すなわち、時間微分演算子 $\partial/\partial t$ はフーリエ変換により複素角周波数 $j\omega$ となることから、(8)式は

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} k_y D_x \\ k_z D_y \\ k_x D_z \end{bmatrix} + \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \sigma_y D_x \\ \sigma_z D_y \\ \sigma_x D_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9}$$

と変換できる。これは、電磁界成分の時間変化が記述された時間に依存する方程式である。

次に、PML の誘電率に関する構成方程式 (6)式からは

$$\begin{cases} s_x D_x = \epsilon_0 \epsilon_r s_z E_x \\ s_y D_y = \epsilon_0 \epsilon_r s_x E_y \\ s_z D_z = \epsilon_0 \epsilon_r s_y E_z \end{cases} \tag{10}$$

が得られ、テンソル成分を用いて書き下し、

$$\begin{cases} (j\omega\kappa_x + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0})D_x = \varepsilon_0\varepsilon_r(j\omega\kappa_z + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0})E_x \\ (j\omega\kappa_y + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0})D_y = \varepsilon_0\varepsilon_r(j\omega\kappa_x + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0})E_y \\ (j\omega\kappa_z + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0})D_z = \varepsilon_0\varepsilon_r(j\omega\kappa_y + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0})E_z \end{cases} \quad (11)$$

さらに逆フーリエ変換によって時間に関する微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\kappa_x D_x) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} D_x = \varepsilon_0\varepsilon_r \left[\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_z E_x) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} E_x \right] \\ \frac{\partial}{\partial t}(\kappa_y D_y) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} D_y = \varepsilon_0\varepsilon_r \left[\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_x E_y) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} E_y \right] \\ \frac{\partial}{\partial t}(\kappa_z D_z) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} D_z = \varepsilon_0\varepsilon_r \left[\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_y E_z) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} E_z \right] \end{cases} \quad (12)$$

を得る。

同様に Faraday の法則(2b)についても、(5)の関係に注意し、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} &= -j\omega\mu_r\mu_0 \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} H_x \\ \frac{s_z s_x}{s_y} H_y \\ \frac{s_x s_y}{s_z} H_z \end{bmatrix} \\ &= -j\omega \begin{bmatrix} s_y B_x \\ s_z B_y \\ s_x B_z \end{bmatrix} \\ &= -j\omega \begin{bmatrix} k_y B_x \\ k_z B_y \\ k_x B_z \end{bmatrix} - \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \sigma_y^* B_x \\ \sigma_z^* B_y \\ \sigma_x^* B_z \end{bmatrix} \\ &= -j\omega \begin{bmatrix} k_y B_x \\ k_z B_y \\ k_x B_z \end{bmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} \sigma_y B_x \\ \sigma_z B_y \\ \sigma_x B_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

と書け、これを逆フーリエ変換し

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} &= -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} k_y B_x \\ k_z B_y \\ k_x B_z \end{bmatrix} - \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \sigma_y^* B_x \\ \sigma_z^* B_y \\ \sigma_x^* B_z \end{bmatrix} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} k_y B_x \\ k_z B_y \\ k_x B_z \end{bmatrix} - \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} \sigma_y B_x \\ \sigma_z B_y \\ \sigma_x B_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。

PML の透磁率に関する構成方程式(7)式からは

$$\begin{cases} s_x B_x = \mu_0 \mu_r s_z H_x \\ s_y B_y = \mu_0 \mu_r s_x H_y \\ s_z B_z = \mu_0 \mu_r s_y H_z \end{cases} \tag{15}$$

が得られ、対応する時間に依存する微分方程式は、(12)式を参考に

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_x B_x) + \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} B_x = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_z H_x) + \frac{\sigma_z^*}{\mu_0} H_x \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_y B_y) + \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} B_y = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_x H_y) + \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} H_y \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_z B_z) + \frac{\sigma_z^*}{\mu_0} B_z = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_y H_z) + \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} H_z \right] \end{cases} \tag{16}$$

となる。

以上の式より 2 次元 TE 波に関する方程式を抽出すると、(9)式第 2 式より

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (k_z D_y) + \frac{\sigma_z D_y}{\varepsilon_0} + J_y \tag{17}$$

(12)式第 2 式より

$$\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_y D_y) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left[\frac{\partial}{\partial t} (\kappa_x E_y) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} E_y \right] \tag{18}$$

(14)式の第 1 式および第 3 式で電磁界成分 $(E_y, D_y, H_x, B_x, H_z, B_z)$ に関する項のみ考慮し

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}(k_y B_x) - \frac{\sigma_y B_x}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t}(k_x B_z) - \frac{\sigma_x B_z}{\varepsilon_0} \quad (20)$$

(16)式の第1式および第3式と(5)の関係を用いて

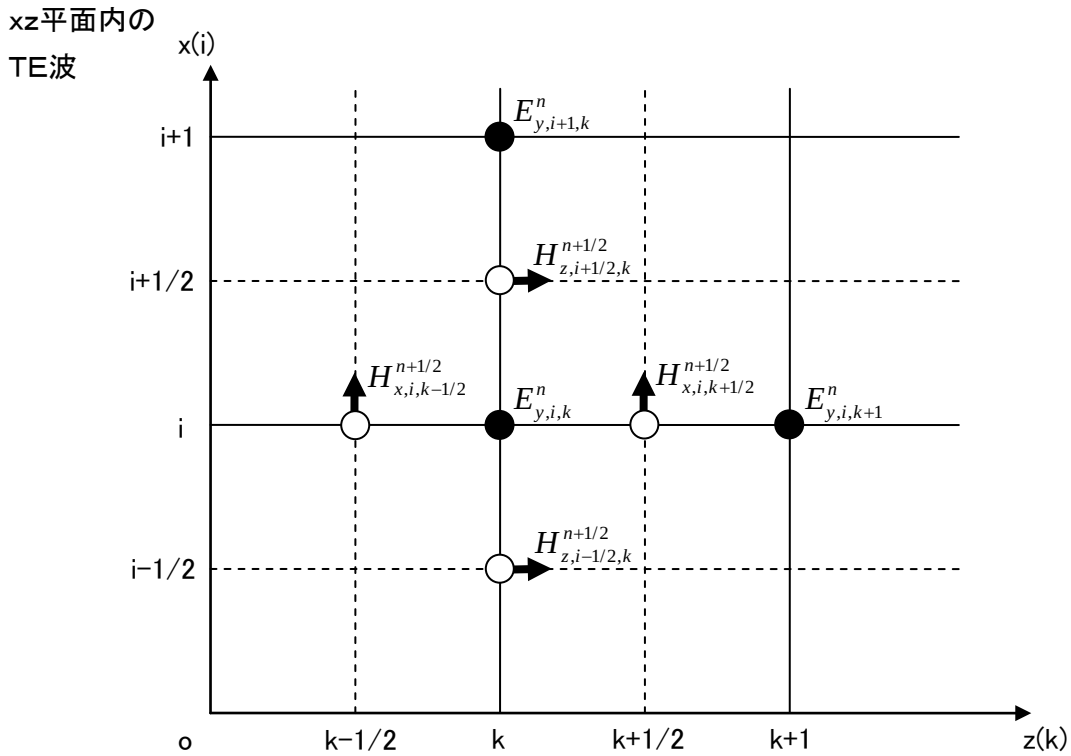
$$\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_x B_x) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} B_x = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_z H_x) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} H_x \right] \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_z B_z) + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} B_z = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\partial}{\partial t}(\kappa_y H_z) + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} H_z \right] \quad (22)$$

を得る。

3. 2次元TE波におけるPMLの差分式の導出

前節(17)式から(22)式を差分化し FDTD 法による時間発展方程式を導出する。差分化には2次元TE波で用いたものと同様のYee格子を用い、それぞれ E と D 、 H と B を同じ格子点にとる。



(17)式を差分化し、

$$\frac{H_{x,i,k+1/2}^{n+1/2} - H_{x,i,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_{z,i+1/2,k}^{n+1/2} - H_{z,i-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} = \kappa_z \frac{D_{y,i,k}^{n+1} - D_{y,i,k}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} \frac{D_{y,i,k}^{n+1} + D_{y,i,k}^n}{2} + J_{y,i,k}^{n+1/2} \quad (23)$$

となり、これを D_y^{n+1} について解くと

$$D_{y,i,k}^{n+1} = \frac{2\varepsilon_0\kappa_z - \sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z + \sigma_z\Delta t} D_{y,i,k}^n + \frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_z + \sigma_z\Delta t} \left(\frac{H_{x,i,k+1/2}^{n+1/2} - H_{x,i,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_{z,i+1/2,k}^{n+1/2} - H_{z,i-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - J_{x,i,k}^{n+1/2} \right) \quad (24)$$

を得る。

(18)式を差分化し、

$$\frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \left[\kappa_y \frac{D_{y,i,k}^{n+1} - D_{y,i,k}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} \frac{D_{y,i,k}^{n+1} + D_{y,i,k}^n}{2} \right] = \kappa_x \frac{E_{y,i,k}^{n+1} - E_{y,i,k}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \frac{E_{y,i,k}^{n+1} + E_{y,i,k}^n}{2} \quad (25)$$

となり、これを E_y^{n+1} について解き

$$E_{y,i,k}^{n+1} = \frac{2\varepsilon_0\kappa_x - \sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0\kappa_x + \sigma_x\Delta t} E_{y,i,k}^n + \frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0(2\varepsilon_0\kappa_x + \sigma_x\Delta t)} \left[(2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t) D_{y,i,k}^{n+1} - (2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t) D_{y,i,k}^n \right] \quad (26)$$

を得る。

(19)式の差分式は、

$$-\frac{E_{y,i,k+1}^n - E_{y,i,k}^n}{\Delta z} = -\kappa_y \frac{B_{x,i,k+1/2}^{n+1/2} - B_{x,i,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \frac{B_{x,i,k+1/2}^{n+1/2} + B_{x,i,k+1/2}^{n-1/2}}{2} \quad (27)$$

となり、これを $B_x^{n+1/2}$ について解き

$$B_{x,i,k+1/2}^{n+1/2} = \frac{2\mu_0\kappa_y - \sigma_y^*\Delta t}{2\mu_0\kappa_y + \sigma_y^*\Delta t} B_{x,i,k+1/2}^{n-1/2} - \frac{2\mu_0\Delta t}{2\mu_0\kappa_y + \sigma_y^*\Delta t} \left\{ -\frac{E_{y,i,k+1}^n - E_{y,i,k}^n}{\Delta z} \right\} \quad (28)$$

を得る。

同様に(20)式の差分式は、

$$\frac{E_{y,i+1,k}^n - E_{y,i,k}^n}{\Delta x} = -\kappa_x \frac{B_{z,i+1/2,k}^{n+1/2} - B_{z,i+1/2,k}^{n-1/2}}{\Delta t} - \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \frac{B_{z,i+1/2,k}^{n+1/2} + B_{z,i+1/2,k}^{n-1/2}}{2} \quad (29)$$

となり、これを $B_z^{n+1/2}$ について解き

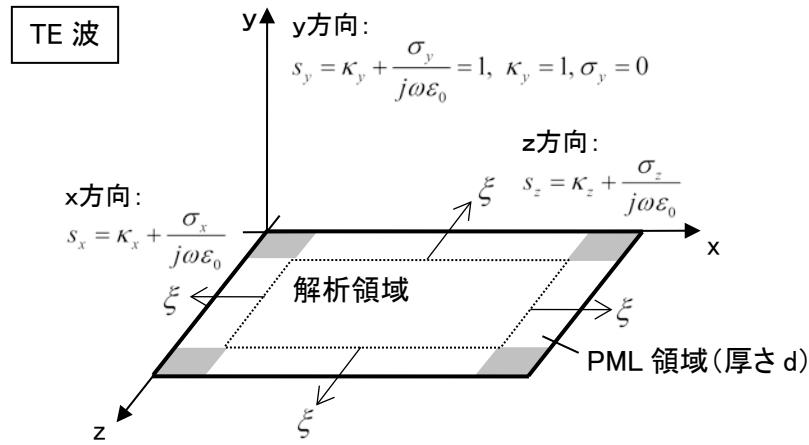
$$B_{z,i+1/2,k}^{n+1/2} = \frac{2\mu_0\kappa_x - \sigma_x^*\Delta t}{2\mu_0\kappa_x + \sigma_x^*\Delta t} B_{z,i+1/2,k}^{n-1/2} - \frac{2\mu_0\Delta t}{2\mu_0\kappa_x + \sigma_x^*\Delta t} \left\{ \frac{E_{y,i+1,k}^n - E_{y,i,k}^n}{\Delta x} \right\} \quad (30)$$

を得る。

その他、(21)、(22) の差分化も同様に行う。導出は各自で試されたい。

4. PMLにおける材料パラメータの決定

PMLの厚みを d とし、その領域内で電磁波が完全に吸収されるようにするため、誘電率と導電率に相当するパラメータ κ_ξ, σ_ξ (ただし、 $\xi = x, y, z$) を次のように決定する。



座標を ξ とし、

$$\sigma(\xi) = \left(\frac{\xi}{d} \right)^m \sigma_{\max},$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{(m+1)\ln\{R(0)\}}{2\eta\epsilon_r d} \approx \sigma_{opt} = \frac{m+1}{150\pi\sqrt{\epsilon_r} \Delta x}$$

ただし、 η は空間のインピーダンス、 $R(0)$ は $\xi = 0$ の境界において達成したい反射率、および

$$\kappa(\xi) = 1 + (\kappa_{\max} - 1) \left(\frac{\xi}{d} \right)^m,$$

$$\kappa_{\max} = 1 \sim 20$$

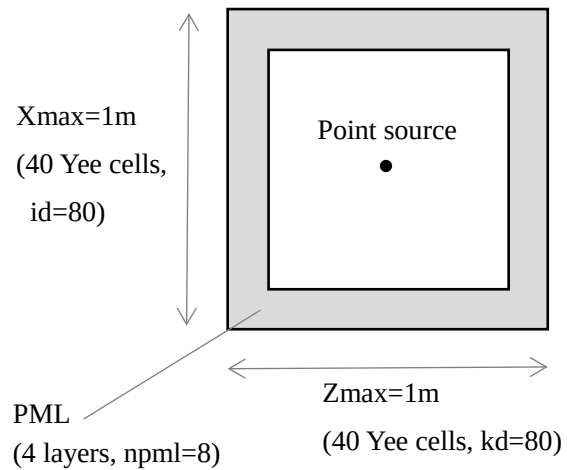
のように決定して電磁波を減衰させ、内側の解析領域内では

$$\sigma = 0, \kappa = 1$$

とすることにより通常の空間を実現する。

5. 解析例

5. 1 正方領域における 2 次元 TE 波の伝搬



ファイル名 : ftdtd_2d_fujii_matlab_PML_v211.m

解析条件およびパラメータの値 :

解析領域の大きさ

$x_{\max} = 1 \text{ m}$

$z_{\max} = 1 \text{ m}$

周波数 $\text{freq} = 1 \text{ GHz}$

分割数 (Yee 格子の数)

x 方向 40 ($\text{id} = 80$)

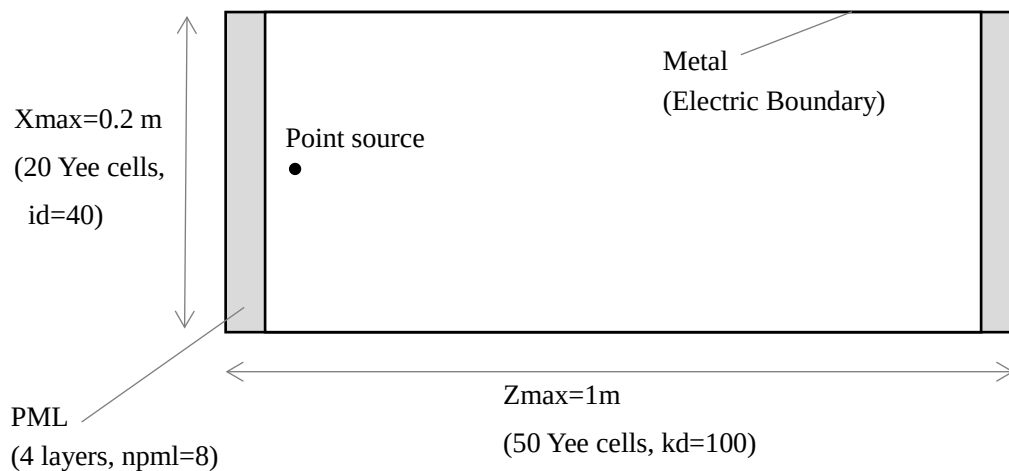
z 方向 40 ($\text{kd} = 80$)

PML 層数 = 4 ($\text{npml} = 8$)

繰り返し計算回数 $\text{nmax} = 100$ 回

波源の大きさと位置 : 点波源、中央

5. 2 矩形導波管、または平行平板導波路における TE 波の伝搬と遮断



ファイル名 : `fdtd_2d_fujii_matlab_PML_v211_RectangularWaveguide.m`

解析条件およびパラメータの値 :

解析領域の大きさ

$x_{\max} = 0.2 \text{ m}$ (遮断周波数 = 0.75 GHz)

$z_{\max} = 1 \text{ m}$

周波数 $\text{freq} = 0.5 \text{ GHz}$ (遮断周波数以下) および 1 GHz (伝搬)

分割数 (Yee 格子の数)

x 方向 20 ($\text{id} = 40$)

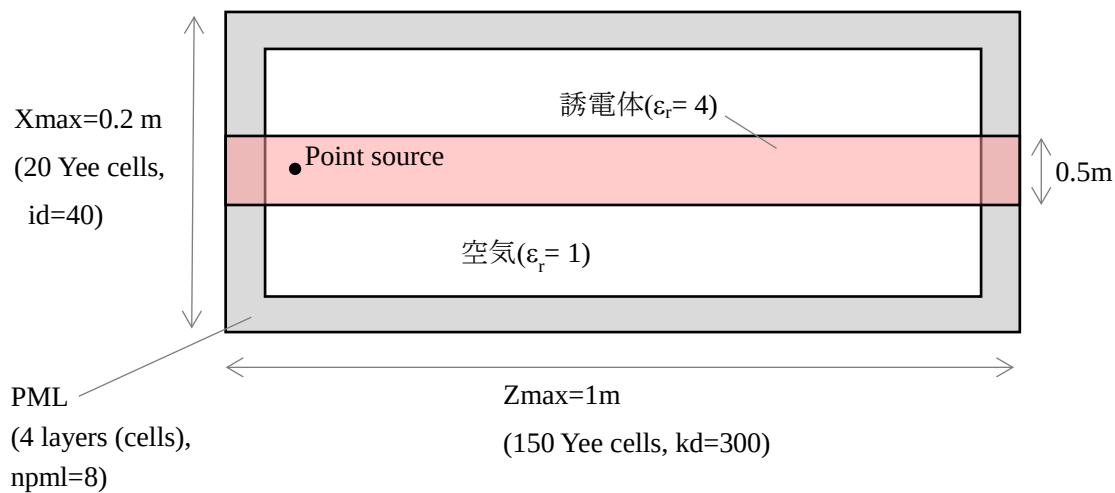
z 方向 50 ($\text{kd} = 100$)

PML 層数 = 4 ($\text{npml} = 8$) ただし、 $x=0$ および $x=x_{\max}$ の境界のみ

繰り返し計算回数 $\text{nmax} = 250$ 回

波源の大きさと位置 : 点波源、左端

5. 3 2次元誘電体スラブ導波路中のパルス状 TE 波の伝搬と導波路分散による波形歪み



ファイル名 : ftdtd_2d_fujii_matlab_PML_v211_Slabwaveguide_GroupVelocity.m

解析条件およびパラメータの値 :

解析領域の大きさ

$x_{\max} = 0.2 \text{ m}$

$z_{\max} = 1 \text{ m}$

周波数 $\text{freq} = 3 \text{ GHz}$

分割数 (Yee 格子の数)

x 方向 20 ($\text{id} = 40$)

z 方向 150 ($\text{kd} = 300$)

PML 層数 = 4 ($\text{npml} = 8$) 全周囲

繰り返し計算回数 $\text{nmax} = 500$ 回

波源の大きさ、位置、時間波形 : 点波源、左端、波束状パルス

正弦波が Raised-cosine 型包絡線 (エンベロープ) で変調されており、包絡線中に正弦波が 5 波長分存在するパルスが伝搬するに従い、導波路の群速度分散によってパルス波形が広がる様子を解析している。さらに、正弦波の位相速度に比べ群速度が遅いため、正弦波がパルス中で相対的に前に移動していく様子が見られる。