

テキスト：今泉他著『ミクロ経済学 基礎と演習』
第3章「生産者行動の理論」の補足

1. 生産者の行動

生産者行動は、技術、費用、および販売に関する条件によって決まる。

生産者は、技術、費用、販売に関する所与の条件の下で、利潤が最大になるように、投入する生産要素の種類と量、生産物の種類と量を決定する。

2. 生産効率

生産効率は、

費用が所与という制約の下での産出量の最大化

ないし、

所与の量を生産するという制約の下での費用の最小化

として特徴づけられる。

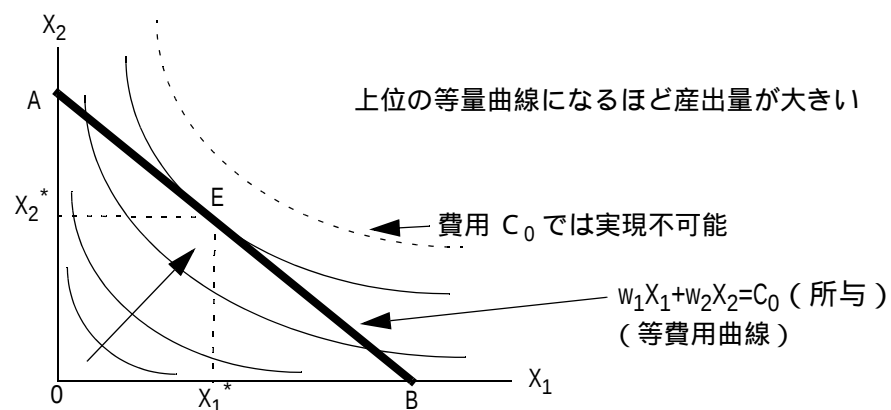
これらは、利潤最大化の必要条件である。

(1) 費用が所与という制約の下での産出量の最大化

問題 1

生産量 $y=f(X_1, X_2)$ を制約条件（費用制約） $w_1X_1 + w_2X_2 = C_0$ の下で最大にせよ。

ただし、要素価格 w_1 、 w_2 、および費用 C_0 は所与である。



均衡 E では、等量曲線と等費用曲線が接している。

つまり、等量曲線の傾き = 等費用曲線の傾き
(技術的限界代替率) (要素価格比)

例題 1

$$\max y = X_1^{1/2} X_2^{1/2}$$

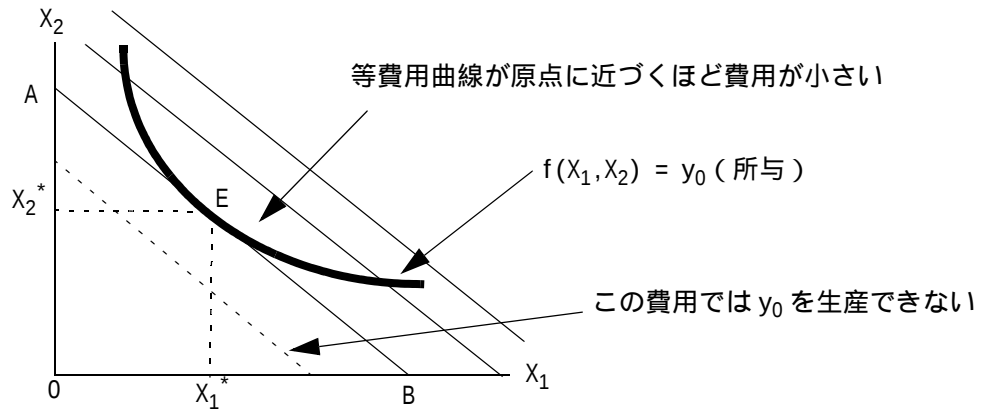
$$\text{subject to } 60X_1 + 15X_2 = 480$$

(2) 一定量を生産するという制約の下での費用の最小化

問題 2

費用 $C = w_1X_1 + w_2X_2$ を制約条件（生産量一定） $f(X_1, X_2) = y_0$ の下で最小にせよ。

ただし、要素価格 w_1 、 w_2 、および生産量 y_0 は所与である。



例題 2

$$\min C = 60X_1 + 15X_2$$

$$\text{subject to } X_1^{1/2} X_2^{1/2} = 8$$

(3) 生産関数

生産者は、生産集合の中で、所与の要素投入量に対し産出量が最大になる点を選ぶ。

生産関数は、最大産出量を要素投入量の関数として表したもの。

要素投入量と産出量との関係は、以下のように分類される。

1 生産要素 (X)、1 産出物 (y) の場合で $y=f(X)$ 、 $\lambda > 1$ として、

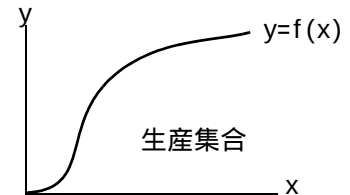
規模に関して収穫逓増： $f(\lambda X) > \lambda f(X)$

規模に関して収穫一定 (収穫不変)： $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

規模に関して収穫逓減： $f(\lambda X) < \lambda f(X)$

代替の弾力性

$$\sigma \equiv - \frac{d(X_2/X_1)/(X_2/X_1)}{d(W_2/W_1)/(W_2/W_1)}$$



生産関数と代替の弾力性

$$CES \text{ 生産関数 } y = [\delta_1 x_1^\rho + \delta_2 x_2^\rho]^{1/\rho} \quad \sigma = 1/(1-\rho)$$

CES 生産関数は一般的なケースである。ρ の値によって種々のタイプの生産関数になる。

ρ = 1 ならば線形

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \sigma = \infty$$

ρ = 0 ならばコブ=ダグラス型

$$y = b x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad \sigma = 1$$

ρ = -∞ ならば投入・産出型 (レオンティエフ型)

$$y = \min \left\{ \frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2} \right\} \quad \sigma = 0$$

(4) まとめ

問題 1：要素価格と費用が与えられれば、最適要素投入量が決定され、生産量が決まる。

* 問題 1 を解き、最適な要素投入量 X_1 、 X_2 、を求めなさい。

* 最適な X_1 、 X_2 、を生産関数に代入し、生産量を要素価格と費用の関数として表しなさい。

(制約付き要素需要関数)

* 例題 1 を解き、最適な x_1 、 x_2 、およびその時の生産量を求めなさい。

問題 2 : 要素価格と生産量が与えられれば、最適要素投入量が決定され、最小費用が決まる。

* 問題 2 を解き、最適な要素投入量 x_1 、 x_2 、を求めなさい。

* 最適な x_1 、 x_2 、を費用の式に代入し、費用を、要素価格と生産量の関数として表しなさい。

(費用関数とよばれる)

* 例題 2 を解き、最適な x_1 、 x_2 、およびその時の最小費用を求めなさい。

例題 1 と例題 2 において、最適な x_1 、 x_2 が一致していることを確認しなさい。

例題 2 では、例題 1 を解いて得られた生産量の値をそのまま費用最小化問題の設定に用いている。要素価格も同一である。したがって、2 つの例題の解である x_1 、 x_2 は一致し、生産量も費用も 2 つの問題で同一であるはずである。

(問題 1 と問題 2 の関係は双対性 (duality) と呼ばれる。)

問題 1 の解答

$$x_1 = C_0/2w_1, \quad x_2 = C_0/2w_2, \quad y = C_0/(2w_1^{1/2}w_2^{1/2})$$

問題 2 の解答

$$x_1 = y_0(w_2/w_1)^{1/2}, \quad x_2 = y_0(w_1/w_2)^{1/2}, \quad C = 2y_0w_1^{1/2}w_2^{1/2}$$

例題 1 の解答

$$x_1=4, \quad x_2=16, \quad y=8$$

例題 2 の解答

$$x_1=4, \quad x_2=16, \quad C=480$$

3 . 利潤最大化

(1) 利潤最大化

いま、生産者が、

2 つの生産要素 x_1 、 x_2 を用いて生産物 y を生産する、

生産の技術的側面は生産関数 $y = f(x_1, x_2)$ によって与えられている、

生産要素は所与の価格 w_1 、 w_2 で自由に購入できる、

生産物は所与の価格 p でいくらでも販売できる、

としよう。

利潤は

$$\pi = \text{収入} - \text{費用}$$

$$= pf(x_1, x_2) - (w_1x_1 + w_2x_2)$$

で与えられる。

利潤最大化の 1 階、2 階条件は、

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p \frac{\partial f}{\partial x_i} - w_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad \text{限界生産物価値 (限界価値生産物) = 要素価格}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i^2} = p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0 \quad (i=1, 2) \quad \text{最適点の近傍では生産関数が局所的に凹}$$

である。さらに、生産を行わないという選択肢もあるから、

$$\pi \geq 0$$

が成立しないといけない。

(2) 要素需要関数の導出

生産技術、生産物価格、生産要素価格が与えられると、より、生産要素の最適投入量が決まる。

換言すると、生産技術（生産関数）を与件とすると、生産要素需要は生産物価格と生産要素価格によって決定される。

これより、生産要素の需要関数 $x_1 = x_1(p, w_1, w_2)$ 、 $x_2 = x_2(p, w_1, w_2)$ が導かれる。

要素需要関数はゼロ次同次である。証明せよ。

（ヒント：等費用曲線はシフトするか否か。）

(3) 供給関数の導出

上の で与えられる最適生産要素投入量を生産関数に代入すると最適生産量が決まる。

換言すると、生産者は最適生産量まで生産するということから、それだけの量を供給するというのである。

つまり、生産技術を所与とすると、供給量は生産物価格と生産要素価格によって決定される。

これより、供給関数 $y(p, w_1, w_2) = f(x(p, w))$ が導かれる。

供給関数はゼロ次同次である。証明せよ。

（ヒント：供給関数は、生産関数に要素需要関数を代入して導出される。）

4. 費用関数

(1) 短期

企業が1つの可変生産要素 x_v と1つの固定要素 x_f から1つの生産物 y を生産しているとし、またそれぞれの価格を w_v 、 w_f 、 p とする。

短期においては、固定要素は一定である。

総費用 = 固定費用 + 可変費用

$$C = w_f x_f + w_v x_v$$

平均費用 (AC)

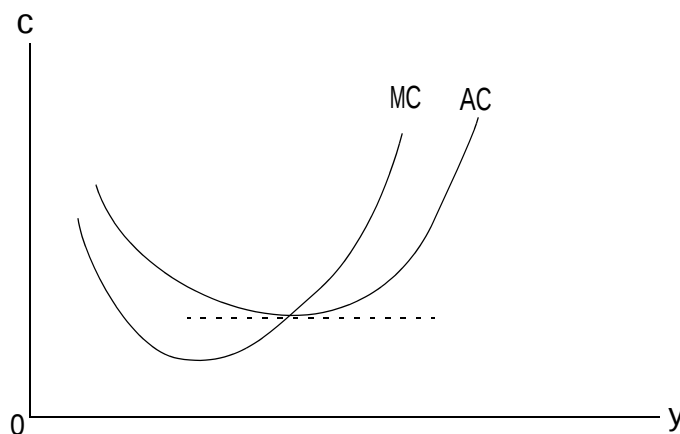
$$AC = C/y$$

平均可変費用 (AVC)

$$AVC = w_v x_v / y$$

限界費用 (MC)

$$MC = \frac{\partial}{\partial x_v} (w_v x_v)$$



AC 曲線が U 字型をしているとき最低点では、

$$\frac{d}{dy}(AC) = \frac{d}{dy}\left(\frac{C}{y}\right) = \frac{y \frac{dC}{dy} - C}{y^2} = 0$$

であるから、これより、 $MC=AC$

つまり、MC 曲線は AC 曲線の最低点を通る。

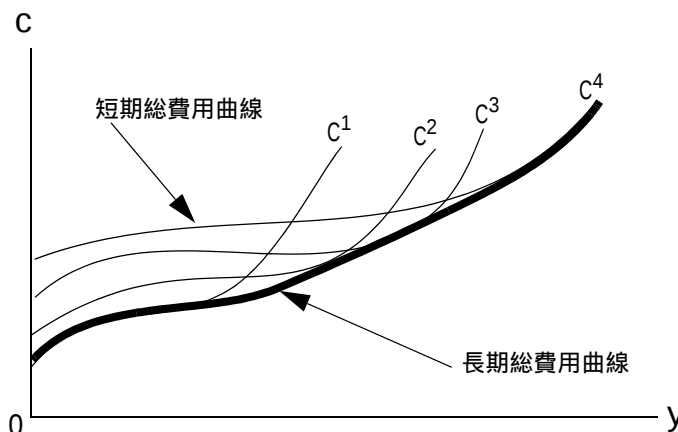
(2) 長期

総費用 = 固定費用 + 可変費用

長期においては、設備等が可変であるから、固定費用も可変である。

企業は、固定費用も可変であることを考慮しながら、生産量に対応して生産費用が最小になるように固定生産要素（工場、設備）を決定する。

したがって、長期総費用曲線は短期総費用曲線の包絡線である。



関連問題

長期平均費用曲線は短期平均費用曲線の包絡線である。証明しなさい。

短期費用曲線から長期費用曲線を求めなさい。

固定設備の規模を k 、産出量を y として、短期総費用（ k が所与の場合）が

$$C = 8y^2 + 10y - 2ky + (1/4)k^2$$

で与えられている。長期費用曲線を求めなさい。

ある産出水準に対して設備規模が最適ならば、短期限界費用 = 長期限界費用である。

証明しなさい。

解答

長期費用曲線が短期費用曲線の包絡線であることから直接導かれる。

ヒント：包絡線であるから、長期費用曲線の各点は、特定の短期曲線の一点に他ならない。

その点では、短期と長期の費用は同一であるから、対応する生産量で割って得られる平均費用も同一である。

包絡線定理利用する。

包絡線定理より $\frac{dC}{dk} = \frac{\partial C}{\partial k}$

また k は最適に設定されているから、 $\frac{\partial C}{\partial k} = 0$

これより、 $k = 4y$ であるから、これを費用の式に代入し長期費用曲線を得る。

$$C = 4y^2 + 10y$$

設問 を利用して説明しよう。

短期限界費用 (SMC) は、 $C = 8y^2 + 10y - 2ky + (1/4)k^2$ を y で微分して得られる。

$$SMC = 16y + 10 - 2k \quad \text{ここで設備規模が最適であるから } k = 4y$$

$$\text{これより、} SMC = 8y + 10$$

長期限界費用 (LMC) は、 $C = 4y^2 + 10y$ を y で微分して得られる。

$$LMC = 8y + 10$$

5. 線形計画法

企業の職員食堂の栄養管理士は、米、魚、肉、野菜等に含まれるビタミン、タンパク質、炭水化物等を考慮し、必要摂取量を満たした上で費用を最小にするように献立を考える。家庭の主婦も、食事をつくる際に同様のことを考えている。

また、企業の製造工程においても、以下に掲げるお菓子製造に関する問題にあるような、似通った問題が存在している。

ここでは、例題を通して、このような問題の捉え方と解法を考える。

例題

ある企業がカカオと砂糖から 2 種類のチョコレート製品を製造している。

原材料の使用可能量と必要量、および利潤が以下のように与えられる。

1 日の使用可能量は、カカオ 16t 以下、砂糖 20t 以下。

商品 A (1 単位当たり) は、4 t のカカオと 2 t の砂糖を必要とする。利潤は 60 万円である。

商品 B (1 単位当たり) は、2 t のカカオと 4 t の砂糖を必要とする。利潤は 40 万円である。

1 日の利潤を最大にするには、商品 A と商品 B をいくらずつ作ればよいか。

また、そのときの利潤はいくらか。

商品 A の生産量を y_1 、商品 B の生産量を y_2 とする。

すると問題は、

$$4y_1 + 2y_2 \leq 16 \quad (\text{カカオの数量制約})$$

$$2y_1 + 4y_2 \leq 20 \quad (\text{砂糖の数量制約})$$

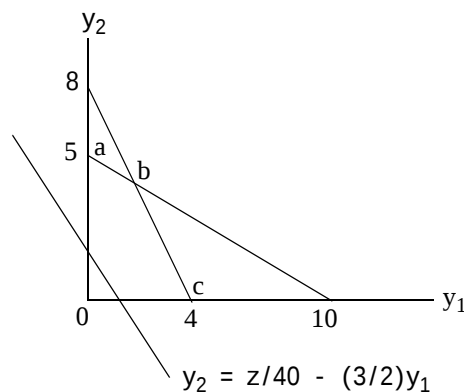
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

の制約の下で、利潤、

$$z = 60y_1 + 40y_2$$

を最大にする、

という問題として定式化される。



z は点 b において最大になる。この時、最適解 $y_1=2$ 、 $y_2=4$ 、最適値 $z=280$

双対問題

上の問題を原問題とすると、双対問題は、

チョコレート 1 単位使う価値を u_1 、砂糖 1 単位を使う価値を u_2 として、

$$4u_1 + 2u_2 \leq 60 \quad (\text{製品 A についての制約})$$

$$2u_1 + 4u_2 \leq 40 \quad (\text{製品 B についての制約})$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

の制約の下で、

$$s = 16u_1 + 20u_2$$

を最小にする、

という問題として定式化される。つまり、最低どれだけの価値があるかという問題になる。

この問題を解き、最適値が原問題と一致することを確認しなさい。($u_1=40/3$ 、 $u_2=10/3$ 、 $s=280$)