

最適課税モデルおよび一般均衡租税モデル の数値的方法

古田俊吉

キーワード：最適課税，応用一般均衡 (A G E，C G E)，数値分析，
G A M S，G A U S S

1. はじめに

最適課税および租税政策の分析においては，モデル分析とともに数値分析が重要な位置を占める。税率体系の詳細な分析，最適税率の各種パラメーターの変化に対する感応度の分析，税制変更の厚生効果分析などのためには数値分析が不可欠なためである。

最適課税および租税政策の分析に関連し，これまで数値分析を含む数多くの研究が行われてきたが，理論モデル，データ，および数値分析のためのアルゴリズムや計算プログラムなどすべてを明示的に示した研究はごく少数である。このため，解ないし結果の再現が困難な研究が多いばかりでなく，Rowse (1985) が指摘する Harris-MacKinnon (1979) の例のように，計算結果に誤りがありながらそれが長い間検証されなかったというケースもある。また，数値計算の結果が，理論分析によって得られた結果と食い違うということもしばしば生じる。

租税政策の分析のように政策提言に影響するような分析にあつては，結果を再現でき研究者が自由に議論に加わることが不可欠といえる。

本論文は，こうした観点から，租税モデルの分析結果を再現でき，また応用分析が可能となるように，理論分析ないし数値分析のためのモデル，均衡計算のための計算プログラムを明示的に示し，数値解が再現可能なようにすることを目的としている。同時に，複数のアルゴリズムを用いることによって数値計算の誤りを防止できることを示す。

2. Scarf の純粹交換モデル

2.1 純粹交換モデル

一般均衡モデルの解を計算する方法には大別して2つの方法がある。不動点を求める方法と非線形最適化問題の解を求める方法である。¹⁾ 以下では，

Scarf(1973, 1984)の純粋交換モデルを例にとって説明する。

Scarf の純粋交換モデルは、生産部門を含まない、5 消費者 10 財モデルである。個人の効用関数は、

$$(2.1) \quad U_i = \sum_{j=1}^{10} a_{ij}^{1/b_j} X_{ij}^{1-1/b_j}, \quad i=1,2,\dots,5$$

で与えられる。個人 i は財の初期賦存の販売から所得 y_i を得、それで財 X_{ij} を購

入し消費する。財 X_j の価格を $p_j (\geq 0)$ 、財 j の初期賦存量を ω_{ij} とすると、所得

は $y_i = \sum_{j=1}^{10} p_j \omega_{ij}$ であるから、個人 i の予算制約式は、

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^{10} p_j X_{ij} \leq \sum_{j=1}^{10} p_j \omega_{ij}$$

となる。予算制約の下での効用最大化の 1 階条件から、財 X_j の需要関数が、

$$(2.3) \quad X_{ij} = \frac{a_{ij} y_i}{p_j^{b_i} \sum_{k=1}^{10} p_k^{1-b_i} a_{ik}}, \quad i=1,2,\dots,5 ; j=1,2,\dots,10$$

として得られる。なお、初期賦存量 ω_{ij} は表 1、 a_{ij} は表 2 でそれぞれ与えられて

表 1

消費者	初期賦存量									
1	0.6	0.2	0.2	20.0	0.1	2.0	9.0	5.0	5.0	15.0
2	0.2	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	5.0	5.0	9.0
3	0.4	9.0	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	5.0	7.0	12.0
4	1.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	8.0	3.0	17.0
5	8.0	1.0	22.0	10.0	0.3	0.9	5.1	0.1	6.2	11.0

表 2

消費者	効用パラメーター									
1	1.0	1.0	3.0	0.1	0.1	1.2	2.0	1.0	1.0	0.7
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	9.9	0.1	5.0	0.2	6.0	0.2	8.0	1.0	1.0	0.2
4	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
5	1.0	13.0	11.0	9.0	4.0	0.9	8.0	1.0	2.0	10.0

いる。また $b_i (i=1,2,\dots,5)$ は $b=(2.0,1.3,3.0,0.2,0.6)$ で与えられている。

市場における財の需給均衡条件は、(2.2)から

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} p_j X_{ij} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} p_j \omega_{ij}$$

となる。以上が Scarf の純粋交換モデルである。

2.2 均衡価格の数値解法

モデルの均衡解を計算する主要な方法としては、Scarf が開発した不動点アルゴリズムと非線形計画法を用いた解法がある。²⁾

不動点アルゴリズムは、 $\sum_{j=1}^{10} p_j = 1$ を満たすように基準化された一組の価格ベクトルを与えて超過需要を計算し、その情報を基に価格ベクトルを修正するという手続きを繰り返し、最終的に(2.4)の不動点としての均衡価格ベクトルを見いだす方法である。ただし、不動点の計算過程で非巡回の議論が当てはまる必要がある。不動点アルゴリズムのなかで、計算手続きが簡明でプログラミングが容易である、単体分割の細かさを任意に変更できる、再スタートのための近似均衡解の値の設定も変更可能など、優れた特徴を有し広範に使われているアルゴリズムは Merrill アルゴリズムである。このアルゴリズムを用いた不動点計算プログラムは Appendix-2A に掲載している。³⁾

他方、非線形最適化問題の解法を用いる方法は、需給均衡(2.4)と $\sum_{j=1}^{10} p_j = 1$ の制約の下で、効用の総和

$$(2.5) \quad TU = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} a_{ij}^{1/b} X_{ij}^{1-1/b}$$

を最大化する価格ベクトルとして均衡価格を得る方法である。GAMS でプログラムしソルバーとして PATHNLP を利用したものを Appendix-2B に掲載している。⁴⁾

いずれの方法を用いても、超過需要の絶対値の総和を 10^{-8} 以下とした場合で、 $p=(0.18784, 0.11060, 0.10017, 0.04322, 0.11652, 0.07843, 0.11766, 0.10332, 0.09956, 0.04267)$ という近似均衡価格を得る。⁵⁾

3. Harris-MacKinnon の最適所得課税モデル

3.1 最適課税モデル

Harris-MacKinnon(1979)は3つの最適課税モデルを示しているが、ここでは Model 2 を用いて、最適所得課税のモデルを示し数値解を求める。⁶⁾

まず、個人について、効用関数は Stone-Geary 型で以下のように表される。

$$(3.1) \quad U_i = (X_i - \gamma)^\alpha (L_i - \eta)^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

ここで、 X_i , L_i はそれぞれ個人 i の財とレジャーの消費である。各個人は 4,000 単位のレジャーを賦存している、また、効用関数のパラメーターは $\gamma = 1000$, $\eta = 400$, $\alpha = 0.4$ であるものとする。個人の労働供給量は、労働の効率要素を θ_i として、 $\theta_i(4000 - L_i)$ となる。なお、 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ は、0.75, 1.0, 1.4, 2.0, 3.0 として与えられている。各個人は異なる効率要素に対して異なる賃金率 w_i が適用されるものとする、所得は $w_i \theta_i (4000 - L_i)$ で与えられるから、予算の収支均衡条件は、

$$(3.2) \quad w_i \theta_i (4000 - L_i) = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

となる。効用最大化の 1 階条件から、財とレジャーの需要はそれぞれ、

$$(3.3) \quad X_i = 2450 w_i \theta_i + 300$$

$$(3.4) \quad L_i = 1550 - 300 / w_i \theta_i$$

で与えられる。これから、個人 i の効用関数は、

$$(3.5) \quad U_i = (2450 w_i \theta_i - 700)^{0.4} (1050 - \frac{300}{w_i \theta_i})^{0.6}$$

となる。

次に、政府は、所得再分配後に一定税収 G を確保するという制約の下で、社会的厚生関数

$$(3.6) \quad W = (1/\rho) \sum_i (U_i)^\rho$$

を最大化するように賃金率 $w_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ を設定するものとする。明示的に所得税率 $t_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ を用いるならば、 $w_i = 1 - t_i$ と表すことができる。 ρ は個人の厚生ウェイトである。(3.5) より、社会的厚生関数は、

$$(3.7) \quad W = \sum_{i=1}^5 (2450 w_i \theta_i - 700)^{0.4} (1050 - \frac{300}{w_i \theta_i})^{0.6}$$

となる。

最後に、財の需給均衡条件である。個人の需要は (3.3), (3.4) で与えられ、

また政府必要税収は G であるから、総需要は $\sum_{i=1}^5 (2450 w_i \theta_i + 300) + G$ で与えられる。

一方、生産については、1 単位の労働で 1 単位の消費財が生産されるものと仮定される。これから、個人 i の生産量は $\theta_i(4000 - L_i)$ であり、総供給は

$\sum_{i=1}^5 \theta_i (2450 + 300 / w_i \theta_i)$ で与えられる。ここで、 $\sum_{i=1}^5 \theta_i = 8.15$ であることを用い

ると、財の需給均衡条件は、

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^5 2450 w_i \theta_i - \sum_{i=1}^5 300 / w_i = 18467.5 - G$$

となる。(3.8)はまた、 $w_i = 1 - t_i$ を用いると、税率で表される再分配後の政府税收条件、

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^5 t_i \theta_i (2450 + \frac{300}{(1-t_i)\theta_i}) = G$$

に変換される。

以上から、政府の最適課税問題は、需給均衡(3.8)もしくは政府税收(3.9)の制約の下に社会的厚生関数(3.7)を最大化する問題として表される。

3.2 最適税率の数値解法

Harris-MacKinnon は彼らが開発した不動点アルゴリズムの一つであるベクトル・サンドイッチ法を用いて最適税率（税引後賃金率）を求めている。しかし、彼らの得た税率の数値解が、アルゴリズムのプログラミングの誤りが原因で、誤ったものであったことを Rowse (1985) が指摘している。ここで Rowse の指摘を確認しておこう。Harris-MacKinnon のモデルを GAMS のモデルで書くと、税引後賃金率を求める場合では Appendix-3 のようになる。与えられた G と ρ の値の下で最適税率 t_i を求めると表 3 のようになる。⁷⁾ Rowse の結果と GAMS モデルで得られた結果が同一であり、彼の指摘が正しいといえる。

表 3

消費者	G=0, $\rho=0.1$	G=0, $\rho=0.5$	G=0, $\rho=0.9$	G=10000, $\rho=0.5$
1	-1.2537	-1.2969	-1.4605	-0.4593
2	-0.6745	-0.6995	-0.8036	-0.0604
3	-0.1776	-0.1865	-0.2363	0.2849
4	0.1957	0.2002	0.1987	0.5516
5	0.4873	0.5053	0.5916	0.7800

4. 山田の最適消費課税モデル

4.1 最適課税モデル

山田(1991)の最適課税モデルは、5家計7財の最適消費課税モデルである。⁸⁾ まず、家計について、効用関数は Stone-Geary 型で以下のように表される。

$$(4.1) \quad U_i = \prod_{j=1}^7 (X_{ij} - \alpha_{ij})^{\beta_{ij}}, \quad i=1,2,\dots,5$$

ここで、 X_{ij} は家計*i*の財*j*の消費である。家計の労働供給は固定されており、各家計*i*($i=1,2,\dots,5$)について、91162, 113926, 132277, 150200, 197908 で与えられている。⁹⁾ 労働がニューメールとされるので、各家計の総支出が労働供給となる。また、生産関数は1次同次と想定され、生産者価格を p_j ($j=1,2,\dots,7$)、生産量を Y_j ($j=1,2,\dots,7$)として、

$$(4.2) \quad L = \sum_{i=1}^5 L_i = \sum_{j=1}^7 p_j Y_j$$

で表される。なお、消費税の課税前には、消費者価格を q_j ($j=1,2,\dots,7$)として、

$$(4.3) \quad q_j = p_j, \quad j=1,2,\dots,7$$

が成立しているものと仮定される。

効用関数のパラメーターは Suruga(1980)の推計が用いられており、表4で示されている。¹⁰⁾

表 4

家計	1	2	3	4	1~4	5	
財	α				β	α	β
1	31.5	35.9	37.8	41.8	0.134	58.1	0.040
2	4.0	9.4	10.5	14.0	0.192	39.8	0.114
3	2.8	8.0	8.6	12.0	0.149	58.0	0.274
4	2.4	3.5	3.6	5.1	0.083	18.9	0.075
5	3.2	8.7	11.6	16.9	0.126	49.2	0.149
6	1.3	5.1	6.2	10.0	0.159	41.0	0.160
7	0.2	5.4	8.9	16.1	0.157	55.6	0.188

家計の予算制約は、

$$(4.4) \quad \sum_{j=1}^7 q_j X_{ij} \leq L_i, \quad i=1,2,\dots,5$$

で与えられる。

予算制約の下での効用最大化の 1 階条件から、財の需要関数が

$$(4.5) \quad X_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \frac{L_i - \sum_{j=1}^7 q_j \alpha_{ij}}{q_j}, \quad i=1,2,\dots,5; \quad j=1,2,\dots,7$$

で得られる。

次に、政府は、総労働供給 L の一定割合 r に相当する労働 L_G を需要するものとする。すると、民間財の生産に向けられる労働供給は $L - L_G = (1-r)L$ となり、民間財供給条件は、

$$(4.6) \quad \sum_{j=1}^7 p_j Y_j = (1-r)L$$

を満たさねばならない。これから、政府の予算制約は、消費税を t_j として、

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^7 t_j X_{ij} = rL$$

として与えられる。ただし、

$$(4.8) \quad t_j = q_j - p_j, \quad j=1,2,\dots,7$$

である。また、市場における財の需給均衡条件は、

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^5 X_{ij}(q_j) = Y_j, \quad j=1,2,\dots,7$$

となる。(4.9)が成立していれば $\sum_{j=1}^7 q_j \sum_{i=1}^5 X_{ij} = \sum_{j=1}^7 q_j Y_j$ であるから、これと(4.2)、(4.3)、(4.6)、(4.8)を用いて(4.7)を得る。つまり、市場均衡が成立していれば政府の予算も均衡する。

以上から、政府の最適課税の問題は、消費税が課税された場合において市場均衡が達成されるという制約の下で、社会的厚生関数を最大化するように消費税率を設定する問題として設定される。

4.2 最適税率の数値解法

山田は、Harris-MacKinnon のベクトル・サンドイッチ法を用いており、基本的に不動点アルゴリズムを用いて最適税率を求めている。ただし、生産関数が線形であるために彼らのアルゴリズムを直接適用できないことから、一部修正を加えたアルゴリズムを利用している。

ここで、不動点を求めるアルゴリズムを示すことにする。政府の政策手段は税率の変更であるから間接効用関数を用いて問題を定式化すると、市場の需給

に関する制約,

$$(4.10) \quad \sum_{j=1}^7 p_j \sum_{i=1}^5 X_{ij}(q) \leq (1-r)L$$

の下で, 社会的厚生関数

$$(4.11) \quad V(q) = W(U_1(X_{11}(q), \dots, X_{17}(q)), \dots, U_5(X_{51}(q), \dots, X_{57}(q)))$$

を最大化するように税率（消費者価格）を設定する問題となる。ここで, q は消費者価格ベクトルである。ラグランジュ乗数を λ とすると, 最適課税の必要条件は,

$$(4.12) \quad V_j - \lambda \sum_{k=1}^7 p_k \sum_{i=1}^5 \frac{\partial X_{ik}}{\partial q_j} = 0, \quad j=1,2,\dots,7$$

および (4.10) で与えられる。ただし, $V_j = \partial V / \partial q_j$ ($j=1,2,\dots,7$) である。

以上から, 不動点アルゴリズムは, (4.10) と (4.12) を同時に満たす税率（消費者価格）を見いだすための算法ということになるが, λ の値も同時に決定する必要がある。そこで, λ は (4.12) の左辺の 2 乗和を最小にするように,

$$(4.13) \quad \lambda = \frac{\sum_{j=1}^7 V_j (\sum_{k=1}^7 p_k \sum_{i=1}^5 \frac{\partial X_{ik}}{\partial q_j})}{\sum_{j=1}^7 (\sum_{k=1}^7 p_k \sum_{i=1}^5 \frac{\partial X_{ik}}{\partial q_j})^2}$$

と決められる。また価格調整は, (4.13) で決まる λ を利用して,

$$(4.14) \quad \Delta q_j = V_j - \lambda \sum_{k=1}^7 p_k \sum_{i=1}^5 \frac{\partial X_{ik}}{\partial q_j}, \quad j=1,2,\dots,7$$

$$(4.15) \quad q_j^{new} = [q_j^{old} + \mu \Delta q_j] \frac{\sum_{k=1}^7 p_k \sum_{i=1}^5 X_{ik}(q_j^{old} + \mu \Delta q_j)}{(1-r)L}, \quad j=1,2,\dots,7$$

というようにする。(4.14) は, 税率引上（価格上昇）によって社会的限界効用が増加するなら税率を引き上げることを示し, (4.15) は価格の引上率を示して

いる。価格調整は不動点としての均衡価格が得られるまで続く。¹¹⁾ η の値の設定

の仕方を一部修正し, GAUSS を用いて作成した数値解法プログラムが Appendix-4A である。

ところで, Deaton(1977) の指摘のように, 理論分析においては, ① Stone-Geary 型の効用関数が想定される場合でも, 社会的厚生関数がベンサム型として $\rho=1$ に限定されるケース, ② 社会的厚生関数において ρ に制約がない場合でも, 効用関数が Cobb-Douglas 型（すべての j に対して $\alpha_j=0$ ）に限定されるケース,

のいずれのケースにおいても一律税率が最適であることが証明されている。

しかし、山田が求めた最適税率，および筆者の作成したプログラムで求めた最適税率は表 5 のようになる。¹²⁾ 筆者らのアルゴリズムおよび計算プログラムは想定される ρ の値の範囲で収束条件が非常に良好であり，得られた最適税率がごく狭い範囲に限られた局所最適とは考えにくいと思われるが，理論の想定した一律税率とは異なる結果であり誤りといえよう。¹³⁾

表 5

財	山田・筆者		GAMS	
	$r=0.05, \rho=1$	$r=0.1, \rho=1$	$r=0.05, \rho=1$	$r=0.1, \rho=1$
1	0.0788	0.1386	0.0554	0.1138
2	0.0638	0.1229	0.0538	0.1125
3	0.0335	0.0909	0.0506	0.1091
4	0.0550	0.1137	0.0529	0.1114
5	0.0449	0.1028	0.0518	0.1106
6	0.0514	0.1098	0.0525	0.1111
7	0.0437	0.1015	0.0517	0.1105

一方，政府の最適課税問題を非線形計画法のモデルで示せば，市場の需給均衡が成立するという条件の下で社会的厚生が最大になるように税率を設定するという簡明なモデルになる。この問題を GAMS のモデルで書き，ソルバーとして CONOPT を用いたのが Appendix-4B である。結果は表 5 に示している。

租税負担水準が $r=0.05$ のときは 5.2% 程度の，また $r=0.1$ のときは税率が 2 倍近くになって 11% 程度の，それぞれ一律税率に近い結果となっている。理論の予想とも整合性があり， $\rho=1$ のケースについては，GAMS による最適税率の数値解が正しいといえよう。

5. Kaiser-Wiegard-Zimmermann の最適消費課税モデル

5.1 最適課税モデル

Kaiser-Wiegard-Zimmermann(1990)の最適課税モデルは，10 所得階級 11 財の最適付加価値税モデルである。

家計については Stone-Geary 型の効用関数が想定され，

$$(5.1) \quad U_i = \prod_{j=1}^{11} (X_{ij} - \alpha_j)^{\beta_j}, \quad i=1,2,\dots,10$$

として表される。ここで， X_{ij} は所得階級 i の家計の財 j の消費である。¹⁴⁾ 各所

得階級の家計所得 $y_i (i=1,2,...,10)$ は所与とされ、8588, 13057, 17790, 22029, 26126, 29711, 33292, 36629, 40043, 47970, で与えられている。また、各所得階級に含まれる家計の数 $N_i (i=1,2,...,10)$ は、1872, 3286, 5213, 6835, 7296, 6657, 5066, 3441, 2270, 4137, で与えられている。

効用関数のパラメーターとして、 $\beta_j (j=1,2,...,11)$ については、0.111, 0.029, 0.054, 0.094, 0.142, 0.032, 0.122, 0.210, 0.062, 0.092, 0.052, $\sum_{j=1}^{11} \beta_j = 1$ で、また、 $\alpha_j (j=1,2,...,11)$ については、2044, 560, 294, 511, 1736, 798, 511, 77, 28, 315, 126, $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i = 7000$, でそれぞれ与えられている。

予算制約の下での効用最大化の1階条件から、財 j の消費者価格を q_j とすると、所得階級 i の家計の需要関数は

$$(5.2) \quad X_{ij} = \alpha_j + \beta_j \frac{y_i - \sum_{j=1}^{11} q_j \alpha_j}{q_j}, \quad i=1,2,...,10 ; j=1,2,...,11$$

として与えられる。

次に、政府は、 $T=105854.48$ の税収を確保するために付加価値税を課すものとする。財 $j (j=1,2,...,11)$ に対する付加価値税率を τ_j とする。ただし、課税前の消費者価格 $q_j = p_j (1 + \tau_j)$ は1と仮定される。¹⁵⁾ すると、政府の最適課税の問題は、税収確保条件、

$$(5.3) \quad T = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{11} \tau_j q_j N_i X_{ij}$$

の下で、社会的効用関数(3.6)を最大にするように $\tau_j (j=1,2,...,11)$ を設定する問題となる。なお、(5.1), (5.2)を用いると、社会的厚生関数は、

$$(5.4) \quad W = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{10} N_i \left\{ \frac{y_i - \sum_{j=1}^{11} q_j (1 + \tau_j) \alpha_j}{\prod_{j=1}^{11} [q_j (1 + \tau_j)]^{\beta_j}} \right\}^{\rho}$$

となる。

5.2 最適税率の数値解法

最適課税問題は、税收制約条件(5.3)の下で社会的厚生関数(5.4)を最大化する問題である。この節の課税モデルは前節のモデルと基本的には同じであるので、解法については GAMS のモデルのみを示す。GAMS のモデルは Appendix-5 に示している。ソルバーを CONOPT とし、 $\rho=0.8$ のケースで最適税率を求めると、

$\tau_j(j=1,2,\dots,11)$ は、0.0651, 0.0629, 0.0993, 0.1001, 0.0790, 0.0525, 0.1035, 0.1140, 0.1138, 0.1056, 0.1083, を得る。また、 $\rho=1$ 、として最適税率を求めると、 $\tau_j=0.09056(j=1,2,\dots,11)$ となって一律税率の結果を得る。

$\alpha_{ij}=0(i=1,2,\dots,10; j=1,2,\dots,11)$ としても同様に最適税率は一律税率となる。これらは Kaizer-Wiegard-Zimmermann の得た結果と一致する。ところが、他の ρ の値で求めた最適税率は彼らの得た結果とかなり異なる。¹⁶⁾ 最適税率を求める場合は、解が局所最適解であることを念頭に置いてその振る舞いに十分注意する必要がある。したがって、複数のアルゴリズムを用いて均衡解の数値計算をする必要があろう。

6. Hirte-Wiegard の一般均衡租税モデル

6.1 理論モデル

現実の経済モデルに基づいて政策効果の評価やシミュレーション分析を行う手法の一つに応用一般均衡(AGE)分析ないし計算可能一般均衡(CGE)分析がある。ここで取り上げる Hirte-Wiegard(1988)のモデルは、簡略ではあるが5部門開放経済の本格的な一般均衡租税モデルである。

投入・産出表は表6のように与えられている。¹⁷⁾ まず、第 j 部門の生産関数は Leontief 型で、

$$(6.1) \quad Q_j = \min\left\{\frac{1}{a_{0j}} f^j(K_j, L_j), \frac{V_{1j}}{a_{1j}}, \dots, \frac{V_{5j}}{a_{5j}}\right\}, \quad j=1,2,\dots,5$$

として与えられる。ただし、 Q_j は商品 j の生産量、 V_{ij} は第 j 産業で投入される第 i 産業の商品の中間投入、 a_{ij} は固定投入係数、 a_{0j} は付加価値率、 K_j 、 L_j はそれぞれ第 j 産業で雇用される資本と労働を表す。ここで、付加価値関数

$f^j(K_j, L_j)$ は CES 型関数で,

$$(6.2) \quad f^j(K_j, L_j) = \phi_j \{ [\delta_j L_j^{-\mu_j} + (1 - \delta_j) K_j^{-\mu_j}]^{-1/\mu_j} \}$$

表 6

V_{ij}	1	2	3	4	5	$p_i C_i$	$p_i G_i$	$p_i I_i$	$p_i X_i$
1	13.90	53.10	0.30	5.70	1.70	7.90	0.00	0.40	2.30
2	14.40	590.70	42.80	64.00	52.00	271.90	0.00	231.20	237.00
3	3.90	80.70	18.90	13.00	10.80	122.80	0.00	12.80	24.40
4	1.90	61.20	31.90	90.80	45.40	139.49	0.00	6.90	11.10
5	0.40	4.40	1.20	5.30	31.60	0.00	324.51	0.00	0.00
wL_i	5.40	353.90	123.30	75.90	161.10				
rK_i	19.10	91.70	65.70	108.20	64.60				
T^L_i	0.00	2.23	0.68	0.38	0.01				
T^K_i	0.46	12.70	5.50	10.82	0.00				
T^Q_i	-1.76	28.37	-11.48	0.89	0.20				
$p_i Q_i$	57.70	1279.00	278.80	374.99	367.41				
$p_i M_i$	27.60	225.00	8.50	13.70	0.00				

と, また, 代替の弾力性は $\mu_j = (1 - \sigma_j) / \sigma_j$, $-1 \leq \mu_j \leq \infty$, と仮定される。 σ_j は

シェア・パラメーター, ϕ_j はスケール・パラメーターである。

生産には製造段階において従価税率 τ_j^Q で課税されるものとする。製造価格を

p_j^m , 生産者価格を p_j とすると, $p_j = (1 + \tau_j) p_j^m$ であるから, 生産税の税額は,

$$(6.3) \quad T_j^Q = \frac{\tau_j^Q}{1 + \tau_j^Q} p_j Q_j, \quad j=1,2,\dots,5$$

で与えられる。

また、生産要素には要素ごと、産業ごとに異なる税率で要素税が課税されるものとする。¹⁸⁾ 税率は従価税率で、資本と労働についてそれぞれ τ_j^K , τ_j^L で表さ

れる。企業は、ある一定の生産量 $\bar{Q}$ を生産するとき、

$$(6.4) \quad f^j(K_j, L_j) = a_{0j} \bar{Q}, \quad j=1,2,\dots,5$$

の制約の下に，費用

$$(6.5) \quad w(1+\tau_j^L)L_j + r(1+\tau_j^K)K_j, \quad j=1,2,\dots,5$$

を最小化する。ここで w は賃金率， r は資本の賃貸価格である。費用最小化の 1 階条件から要素需要関数，

$$(6.6) \quad L_j = \frac{1}{\phi_j} a_{0j} \bar{Q} \{\delta_j + (1-\delta_j) \left[\frac{\delta_j r (1+\tau_j^K)}{(1-\delta_j) w (1+\tau_j^L)} \right]^{(1-\sigma_j)}\}^{1/\mu_j}, \quad j=1,2,\dots,5$$

$$(6.7) \quad K_j = \frac{1}{\phi_j} a_{0j} \bar{Q} \{(1-\delta_j) + \delta_j \left[\frac{(1-\delta_j) w (1+\tau_j^L)}{\delta_j r (1+\tau_j^K)} \right]^{(1-\sigma_j)}\}^{1/\mu_j}, \quad j=1,2,\dots,5$$

を得る。長期においては，ゼロ利潤条件，

$$(6.8) \quad p_j Q_j - \sum_{i=1}^5 p_i a_{ij} Q_j - \frac{\tau_j^Q}{(1+\tau_j^Q)} p_j Q_j - r(1+\tau_j^K)K_j - w(1+\tau_j^L)L_j = 0$$

が成立する。

個人は，ここでは代表的消費者 1 人とし，効用関数は CES 効用関数で，

$$(6.9) \quad U = [(1-\beta)^{1/\nu} C^{(\nu-1)/\nu} + \beta^{1/\nu} F^{(\nu-1)/\nu}]^{\nu/(\nu-1)}$$

と表されるものとする。なお， C は合成消費として，

$$(6.10) \quad \log C = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \log C_j, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_j = 1$$

と仮定される。 F はレジャーである。個人の時間賦存量を E とすると， $E = F + L$ となる。また，総資本量は $\bar{K}$ で固定されているものとする。これから完全所得 (full income) は $Z \equiv wE + r\bar{K}$ と定義される。個人の予算制約は，合成消費の消費者価格を q ，所得税額を T^y ，移転額を Tr ，とすると，

$$(6.11) \quad qC + wF = wE + r\bar{K} - T^y + Tr,$$

で与えられる。ただし，個人所得税関数は，

$$(6.12) \quad T^y = \tau^y [w(E - F) + r\bar{K} - A]$$

と想定される。 τ^y は所得税率， A は所得控除である。予算制約の下での効用最大化の条件から，レジャーと合成消費の需要関数が，

$$(6.13) \quad F = \frac{\beta[(1-\tau^y)Y + \tau^y A + Tr]}{[w(1-\tau^y)]^\nu \Omega}$$

$$(6.14) \quad C = \frac{(1-\beta)[(1-\tau^y)Y + \tau^y A + T_r]}{q^v \Omega}$$

として得られる。ただし、 $\Omega = (1-\beta)q^{(1-\nu)} + \beta[w(1-\tau^y)]^{(1-\nu)}$ である。

可処分所得からの平均貯蓄性向を γ とすると消費は、

$$(6.15) \quad \sum_{j=1}^4 q_j C_j = (1-\gamma)[wL + r\bar{K} - T^y + T_r]$$

で、また個人の貯蓄 S は $S = \gamma[wL + r\bar{K} - T^y + T_r]$ で与えられる。

個人は(6.15)を制約として、(6.10)を最大化する。この1階条件から各財の消費需要が、

$$(6.16) \quad C_j = \frac{\alpha_j}{q_j} (1-\gamma)[wL + r\bar{K} - T^y + T_r], \quad j=1,2,\dots,4$$

で得られる。ここで、消費者価格は、

$$(6.17) \quad q_j = p_j(1+\tau_j^c), \quad j=1,2,\dots,4$$

として決まる。ただし、 τ_j^c は付加価値税率であり、仮定から $\tau_5^c = 0$ である。

各産業の投資需要 I_j は貯蓄の一定割合として、

$$(6.18) \quad I_j = \frac{\lambda_j}{p_j} S, \quad \sum_{j=1}^4 \lambda_j = 1$$

で決定されるものと仮定される。

海外部門については、輸出 X と輸入 M は、

$$(6.19) \quad X_j = \left(\frac{p_j}{d}\right)^\theta \cdot X_j^0, \quad \infty \leq \theta \leq -1, \quad j=1,2,\dots,4$$

$$(6.20) \quad M_j = \left(\frac{p_j}{d}\right)^\eta \cdot M_j^0, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad j=1,2,\dots,4$$

と想定される。ここで、世界価格 p_j/d に関する輸出弾力性 θ と輸入弾力性 η は

一定であると仮定される。 d は為替レートである。為替レートの影響を消去す

るために貿易収支の均衡条件 $\sum_{j=1}^4 p_j X_j - \sum_{j=1}^4 p_j M_j = 0$ を用いると、輸出入は、

$$(6.21) \quad X_j = \left[\frac{\sum_{h=1}^4 p_h^{(\theta+1)} X_h^0}{\sum_{h=1}^4 p_h^{(\eta+1)} M_h^0} \right]^{\theta/(\eta-\theta)} \cdot p_j^\theta X_j^0, \quad j=1,2,\dots,4$$

$$(6.22) \quad M_j = \left[\frac{\sum_{h=1}^4 p_h^{(\theta+1)} X_j^0}{\sum_{h=1}^4 p_h^{(\eta+1)} M_h^0} \right]^{\eta/(\eta-\theta)} \cdot p_j^\eta M_j^0, \quad j=1,2,\dots,4$$

で与えられる。

最後に、政府の予算制約である。政府は公共財として一定量 $\bar{G}_5$ の供給をするのに要する財源 $p_5 G_5$ および移転 T_r に要する財源を確保するために課税する。これより、政府の予算制約式は以下のように与えられる。

$$(6.23) \quad T_r + p_5 G_5 = \sum_{j=1}^5 (\tau_j^K r K_j + \tau_j^L w L_j) + \sum_{j=1}^5 \tau_j^c p_j C_j + \sum_{j=1}^5 \frac{\tau_j^Q}{1 + \tau_j^q} p_j Q_j + \tau^y (wL + r\bar{K} - A)$$

以上から、一般均衡租税モデルの均衡条件は、

$$(6.24) \quad L = \sum_{j=1}^5 L_j, \quad \bar{K} = \sum_{j=1}^5 K_j$$

$$(6.25) \quad Q_j + M_j = \sum_{h=1}^5 \alpha_{hj} Q_j + C_j + G_j + I_j + X_j, \quad j=1,2,\dots,5$$

として与えられる。政府部門に関するパラメーター、 τ_j^K , τ_j^L , τ_j^c , τ_j^Q , τ^y ,

A , および $\bar{G}_5$ の値が与えられると、方程式は (6.24) と (6.25) の 7 本、変数は $w, r, p_1, p_2, \dots, p_5$ の 7 個であるから、システムに解が存在し一意であれば均衡解を求めることができる。¹⁹⁾

6.2 均衡価格の数値解法

一般均衡租税モデルの数値解を得るためには、政府の予算制約に関するパラメーターの値以外のパラメーターの値も既知でなければならない。種々のパラメーターの値を決定する方法がカリブレーションと呼ばれる手続きである。²⁰⁾ 以下では、カリブレーションで求められたパラメーターの値を用いる。

いま、政府が、生産要素への選択的な課税を廃止し、同一税収を得る単一税率の純所得型付加価値税を導入したとしよう。このときの新均衡を数値的に求めたい。ここでは、不動点アルゴリズムを用いた均衡価格の数値解法についてみることにする。

投入・産出表を考慮すると、(6.8)は、

$$(6.26) \quad p_j Q_j - \sum_{i=1}^5 p_i a_{ij} Q_j - \frac{\tau_j^Q}{(1 + \tau_j^Q)} p_j Q_j - (1 + \tau^{vati})(rK_j + wL_j) = 0$$

となる。ここで、 τ^{vati} は純所得型の付加価値税率である。また、政府の予算制約式は、

$$(6.27) \quad T_r + p_5 G_5 = \sum_{j=1}^5 (1 + \tau^{vati})(rK_j + wL_j) + \sum_{j=1}^5 \tau_j^c p_j C_j \\ + \sum_{j=1}^5 \frac{\tau_j^Q}{1 + \tau_j^Q} p_j Q_j + \tau^y (wL + r\bar{K} - A)$$

と書き換えられる。(6.26)の両辺を Q_j で割り、 $l_j = L_j/Q_j$ 、 $k_j = K_j/Q_j$ を用いて行列表示すると、

$$(6.28) \quad \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau_1^Q}{1 + \tau_1^Q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\tau_2^Q}{1 + \tau_2^Q} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \frac{\tau_5^Q}{1 + \tau_5^Q} \end{pmatrix} - a' \right] \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_5 \end{pmatrix} = (1 + \tau^{vati}) \begin{pmatrix} wl_1 + rk_1 \\ wl_2 + rk_2 \\ \vdots \\ wl_5 + rk_5 \end{pmatrix}$$

を得る。ここで、 a' は投入係数行列の転置行列である。また、 $wl_j + rk_j$ は商品 j の単位費用である。以下、超過需要の調整過程を通じて均衡価格が計算されるアルゴリズムの概略を示す。

① w, r, τ^{vati} の値が与えられると、(6.6)、(6.7)から単位費用が決まり、 $[\varphi - a']$ が正則のとき生産者価格が決定される。^{2 1)}ただし、 φ は左辺の税率行列である。生産者価格が決まると、(6.17)から消費者価格、 Z が決定され、ラスパイレス物価指数が決まる。^{2 2)}

② ラスパイレス物価指数が与えられると T_r が決まる。 α_j は所与であり、

$$(6.29) \quad q = (1 - \gamma)^{-1} \prod_{j=1}^4 \left(\frac{q_j}{\alpha_j} \right)^{\alpha_j}$$

から合成消費の消費者価格が決まる。 β, v は所与であるから、(6.13)、(6.14)

から F が決まる。これより、 L が決まるから、個人所得 $(wL + r\bar{K})$ が決まる。次に、(6.12) から所得税が決まり、可処分所得 $(wL + r\bar{K} - T^y + T_r)$ が決まる。

③ 可処分所得が決まると、 γ が所与であるから貯蓄 S が決まり、 λ_j が所与で

あるから投資 I_j が決まる。(6.16) より各商品の消費 C_j がきまり、

$$(6.30) \quad C = (1 - \gamma)[wL + r\bar{K} - T^y + T_r] \prod_{j=1}^4 \left(\frac{\alpha_j}{q_j}\right)^{\alpha_j}$$

より合成消費が決まる。 $\bar{G}_5$ は固定されているから $p_5 \bar{G}_5$ が決まる。最後に、輸出弾力性 θ 、輸入弾力性 η が所与であり、(6.21), (6.22) から輸出入が決まる。

④ 各部門の総需要が決まると、

$$(6.31) \quad Q = [E - a]^{-1} D$$

によって各部門の生産量が決まるから、(6.6), (6.7) から各部門の要素需要量が決まる。ここで、 Q は生産量ベクトル、 E は単位行列、 D は最終需要ベクトル、 $[I - a]^{-1}$ は逆行列である。

⑤ 諸変数が決定されたので、(6.24), (6.27) を用いて生産要素および政府予算について超過需要を計算する。²³⁾ それぞれの超過需要が予め決めた許容限度以内ならば、均衡解（近似均衡価格）が得られたと判断し計算を打ち切る。それ以外の場合は、 w, r, τ^{vati} の値を変更し、①に戻って計算を継続する。

以上の不動点アルゴリズムに基づいて、Merrill アルゴリズムおよびニュートン法を用いて均衡価格を求めたところ、いずれにおいても近似均衡価格として、 $(w, r, p_1, p_2, \dots, p_5) = (1.0, 1.0625, 1.0489, 1.0227, 1.0263, 1.0204, 1.0475)$ を得た。Hirte-Wiegard では、 $(w, r, p_1, p_2, \dots, p_5) = (1.0, 1.0632, 1.0496, 1.0227, 1.0271, 1.0197, 1.0465)$ を得ている。²⁴⁾ 彼らの結果と比較して多少誤差があるが、この原因は投入・産出表を用いる際の特有の問題と逆行列の計算にあるのかもしれない。ちなみに、Merrill アルゴリズムとニュートン法の双方で均衡値への収束状態が良くない。したがって、Kehoe (1991) が指摘するように、このような一般均衡モデルにおいては解法のアルゴリズムやプログラミングのみならず解の振る舞いにも十分注意する必要がある。

7. むすび

Scarf の純粋交換モデル、Harris-MacKinnon の最適所得課税モデル、山田の最適消費税モデル、Kaiser-Wiegard-Zimmermann の最適付加価値税モデル、Hirte-Wiegard の一般均衡租税モデルを例にとって、最適課税モデルや一般均

均衡租税モデルの数値解を求めるアルゴリズム，アルゴリズムを実際の数値計算に移すプログラムを示すとともに，数値解が理論的予想と異なってしまうことを含めて，均衡解を求める数値的方法において陥り易い落とし穴を示した。

近年において，C G E モデルを用いた政策分析が非常に盛んであり，また GAMS を含めて大規模モデルの解法ソフトウェアも多数開発されている。本稿で示したように，数値計算の誤りは各種のアルゴリズムや解法を同時に用いることによって避けるしかないといえる。したがって，数値計算を含む最適課税や一般均衡租税モデルの分析においては，理論モデル，解法のアルゴリズム，実際の解法プログラム，データを同時に示し，解を再現できるようにするのが望ましい。

A p p e n d i x

```
***** Apendix-2A *****
/*****
*** Scarf-1984-sec6-merrill.e
*** Fixed Point Algorithm
*** Merrill's Algorithm
*** Reference: Shoven-Whalley(1992), pp.46-57.
*** GAUSS 5.0 Light
*** 2002.08.01
*****/
format 8,4; ngood = 10;ncons = 5; ngood1 = 11;
omega = zeros(5,10); label = zeros(11,1);
replacej = 0; grid = 10; refine = 1;
tolerror = 10.0; ifin = 1;
a = zeros(5,10); b = zeros(5,1);
let omega = { .6      .2      .2 20.0  .1    2.0   9.0 5.0 5.0 15.0,
              .2   11.0   12.0 13.0 14.0 15.0 16.0 5.0 5.0  9.0,
              .4    9.0    8.0  7.0  6.0  5.0  4.0 5.0 7.0 12.0,
              1.0    5.0    5.0  5.0  5.0  5.0  5.0 8.0 3.0 17.0,
              8.0    1.0   22.0 10.0  .3    .9   5.1  .1 6.2 11.0};
let      a = { 1.0   1.0   3.0  .1  .1    1.2  2.0  1.0  1.0  0.07,
              1.0   1.0   1.0 1.0 1.0    1.0  1.0  1.0  1.0  1.0,
              9.9   .1   5.0  .2 6.0    0.2  8.0  1.0  1.0  0.2,
              1.0   2.0   3.0 4.0 5.0    6.0  7.0  8.0  9.0 10.0,
```

```

1.0 13.0 11.0 9.0 4.0 0.9 8.0 1.0 2.0 10.0};

let b = 2.0 1.3 3.0 0.2 0.6;
p = zeros(10,1); di= zeros(5,10); zeros(10,1);
y = zeros(5,1); s = zeros(10,1); exgood = zeros(10,1);

/**/ Excess Demand /**/
proc (0) = excess();
    local sum, ap;
    ap = zeros(5,1);
    print p;
    y = omega*p;
    for i (1,ncons,1);
        sum = 0;
        for j (1, ngood,1);
            sum = sum + a[i,j]*p[j,1]^(1-b[i,1]);
        endfor;
        ap[i,1] = sum;
    endfor;
    for i (1,ncons,1);
        for j (1, ngood,1);
            di[i,j] =(a[i,j]*y[i,1])/(p[j,1]^b[i,1]*ap[i,1]);
        endfor;
    endfor;
    for j (1, ngood,1);
        d[j,1] = sumc(di[.,j]);
    endfor;
    s = sumc(omega);
    exgood = d - s;
ret p;
endp;

/**/ Merrill's Fixed Point Algorithm /**/
proc (0) = solve();
    local iter, ncount, newcol, m; jplus1,jminus1, tote;
    local s, maxex, maxexj, rep,kspj,mb, mks, artificial,nindex;

```

```

m = zeros(11,11); newcol = zeros(11,1); kspj = zeros(11,1);
mb = zeros(11,1); mks = zeros(11,1); nindex = zeros(10,1);
ncount = 1;
/** Step 2 **/
mb[1,1] = 1;
for i (1,ngood,1);
    mb[i+1,1] = grid*p[i,1];
endfor;
iteration500:
    rep = 1;
    for i (1,ngood+1,1); m[.,i] = mb; m[i,i] = m[i,i]-1; endfor;
/** Step 3 **/
mks = m[.,1]; s = 0;
for i (2,ngood+1,1); s = s + m[i,1]; endfor;
for i (1,ngood,1); p[i,1] = m[i+1,1]/s; endfor;
print " p " p;
excess();
tote = 0.0;
for i (1, ngood ,1 ); tote = tote + abs(exgood[i]); endfor;
if tote <= tolerror;
    print " error is less than tolerror";
    end;
endif;
    for i (1,ngood,1); label[i+1,1] = i; endfor;
maxex = exgood[1,1]; maxexj = 1;
for i ( 2,ngood,1);
    if exgood[i,1] > maxex; maxex=exgood[i,1]; maxexj=i; endif;
endfor;
label[1,1] = maxexj;
/** Step 4 **/
for i (2, ngood+1,1);
    if label[1,1] == label[i,1];
        replacej = i;
        break;
    endif;
endfor;

```

```

        endfor;
        print " replacej " replacej;
replace2:
        jplus1 = replacej +1; jminus1 = replacej -1;
        if replacej == ngood+1;
            jplus1 = 1;
        elseif replacej == 1;
            jminus1 = ngood+1;
        endif;
        newcol = m[.,jplus1]+m[.,jminus1]-m[.,replacej];
isartificial:
        /** case 1 **/
        if m[1,replacej] > 0;
            kspj[.,1] = mks-m[.,replacej];
            for i (2,ngood+1,1);
                if kspj[i,1] > 0.0;
                    label[replacej,1]=i-1;
                    break;
                endif;
            endfor;
            for i(1,ngood+1,1);
                if i == replacej;
                    continue;
                elseif label[replacej,1] == label[i,1];
                    replacej = i;
                    break;
                endif;
            endfor;
            jplus1 = replacej +1; jminus1 = replacej -1;
            if replacej == 11;
                jplus1 = 1;
            elseif replacej == 1;
                jminus1 = 11;
            endif;
            newcol = m[.,jplus1]+m[.,jminus1]-m[.,replacej];

```

```

        m[:,replacej] = newcol;

        goto isartificial;
    endif;
isoriginal:

    /** case 2 **/
    for i (1,ngood,1); p[i,1] = (1.0/grid)*newcol[i+1,1]; endfor;
    excess();
    tote = 0.0;
    for i (1, ngood ,1 ); tote = tote + abs(exgood[i]); endfor;
    if tote <= tolerror;
        print " error is less than tolerror";
    for i (1, ngood,1 );
        print "exgood[" i "]=" exgood[i,1];
    endfor;
    maxex = exgood[1,1]; maxexj = 1;
    for i ( 2,ngood ,1);
        if exgood[i,1] > maxex;
            maxex=exgood[i,1];
            maxexj=i;
        endif;
    endfor;
    label[replacej,1] = maxexj;
    for i (1, ngood+1,1);
        if replacej == i;
            continue;
        elseif label[replacej,1] == label[i,1];
            replacej = i;
            break;
        endif;
    endfor;
/** Step 5 **/
    if sumc(m[1,.])' > 1;
        rep = rep + 1;
        if rep > 1000;
            print " unable to label completely";

```

```

        print " restart with another price vector ";
        end;
    endif;
    goto replace2;
elseif sumc(m[1,:]) <= 0;
    print " can not continue";
    end;
endif;
for i (1,ngood+1,1);
    if m[1,i] == 1; artificial = i; endif;
endfor;
for i (1,ngood,1); nindex[i,1] = 0; endfor;
for j (1,ngood+1,1);
    if j == artificial;
        continue;
    else;
        for i (1,ngood,1);
            if label[j,1]==i;
                nindex[i,1]=nindex[i,1]+1;
            endif;
        endfor;
    endif;
endfor;
for i (1,ngood,1);
    if nindex[i,1] >1; goto replace2; endif;
endfor;
/** Step 7 **/
for j (1,ngood+1,1); newcol[j,1] = 0; endfor;
for j (1,ngood+1,1);
    if m[1,j]==0;
        newcol = newcol + m[:,j];
    endif;
endfor;
grid = grid*refine;
mb[1,1] = 1;

```

```

for i (1,ngood,1);
    mb[i+1,1] = grid*p[i,1];
endfor;
ncount = ncount +1;
tote = 0.0;
for i (1, ngood ,1 );
    tote = tote + abs(exgood[i]);
endfor;
if tote > tolerror;
    if ncount < 10;
        goto iteration500;
    elseif ncount > 10;
        goto suspend;
    endif;
endif;
suspend:
    print " ncount =" ncount;
retp;
endp;
/**** Main ****/
let p = 0.12 0.11 0.1 0.12 0.08 0.1 0.05 0.10 0.12 0.1;
/** Step 1 **/
grid = 300;
refine = 10.0;
tolerror = 1.0e-6;

* * * * * Apendix-2B * * * * *
*** scarf-1984-sec6.gms
*** GAMS VIS21.4: Solver PATHNLP
*****
sets
    i consumers / h1*h5 /
    j commodities / c1*c10 /;
alias (i,h),(j,c);
table omega(i,j)

```


	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10
h1	.6	.2	.2	20.0	.1	2.0	9.0	5.0	5.0	15.0
h2	.2	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	5.0	5.0	9.0
h3	.4	9.0	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	5.0	7.0	12.0
h4	1.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	8.0	3.0	17.0
h5	8.0	1.0	22.0	10.0	.3	.9	5.1	.1	6.2	11.0

```

table a(i,j)
      c1    c2    c3    c4    c5    c6    c7    c8    c9    c10
h1    1.0    1.0    3.0    .1    .1    1.2    2.0    1.0    1.0    0.07
h2    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0    1.0
h3    9.9     .1    5.0    .2    6.0    0.2    8.0    1.0    1.0    0.2
h4    1.0     2.0    3.0    4.0    5.0    6.0    7.0    8.0    9.0    10.0
h5    1.0    13.0   11.0    9.0    4.0    0.9    8.0    1.0    2.0    10.0

parameter b(i) para ref / h1 2.0, h2 1.3, h3 3.0, h4 0.2, h5 0.6/;
parameter s(j) market supply;
s(j) = sum(i, omega(i, j));
variables
y(i)    individual income,
ap(i)   numer,
dh(i,j) individual demand,
d(j)    market demand,
ui(i)   individual utility,
tu       total utility
p(j)    commodity prices;
equations
eqY(i)
eqAP(i)
eqDH(i, j)
eqD(j)
eqMKT(j)
eqUI(i)
eqTU
eqCST;
eqY(i).. y(i) =E= sum(j, omega(i, j)*p(j));
eqAP(i).. ap(i) =E= sum(j, a(i, j)*p(j)**(1-b(i)));

```

```

eqDH(i,j).. dh(i,j) =E= a(i,j)*y(i)/(ap(i)*p(j)**b(i));
eqD(j).. d(j) =E= sum(i,dh(i,j));
eqMKT(j).. d(j) =E= s(j);
eqUI(i).. ui(i) =E= sum(j,a(i,j)**(1/b(i))*dh(i,j)**(1-1/b(i)));
eqTU.. tu =E= sum(i,ui(i));
eqCST.. sum(j,p(j)) =E= 1;
dh.lo(i,j)= 0.00001;
ap.lo(i) = 0.00001;
p.lo(j) = 0.0001;
p.up(j) = 0.999;
p.l(j) = 0.01;
model GEQ /all/;
Option NLP = PATHNLP;
solve GEQ using NLP maximizing tu;

```

***** Appendix-3 *****

```

*** hml1979-model2.gms
*** Harris-MacKinnon(1979), Model 2
*** GAMS: SNOPT
set      i      consumers      /ind1*ind5/;
Alias (i,j);
Parameter alpha  parameter of Utility function /0.7/;
Parameter eta    committed leisure /500/;
Parameter gamma  committed consumption /1000/;
Parameter theta(i) efficiency factor
              /ind1 .75, ind2 1.0, ind3 1.4, ind4 2.0, ind5 3.0/;
Parameter rho    parameter of social welfare function /0.1/;
positive variable w(i) wage tax rate;
variables  U(i)    utility of consumer
           SW      social welfare;
equations
eqX(i)    utility of consumer
eqSW      social welfare
eqB       budget constraint;
eqX(j)..  U(j) =E= (2450*w(j)*theta(j)-700)**alpha*

```

```

(1050-300/(w(j)*theta(j)))*(1-alpha);
eqSW..    SW =E=    sum(j,U(j)**rho)/rho;
*total supply = total demand
eqB..    sum(j,theta(j)*(2450+300/(w(j)*theta(j)))) =E=
          sum(j,2450*w(j)*theta(j)+300);
w.lo(j) = 0.2;
w.up(j) = 2.6;
w.l(j) = 0.4;
Option Decimals = 5;
Model HM /all/;
Option NLP = SNOPT;
solve HM maximizing SW using NLP;

```

*** * * * * Apendix-4A * * * * ***

```

/** opt-yamada.e
*** Yamada(1991) ch.6
*** GAUSS Light 5.0
*****/
nhousehold=5;ngood=7;
a=zeros(5,7); b=zeros(5,7); p=zeros(7,1); t=zeros(7,1);
q=zeros(7,1); q1=zeros(7,1); q2=zeros(7,1); q3=zeros(7,1);
deltaq=zeros(7,1); x=zeros(5,7); x1=zeros(5,7); xa=zeros(5,7);
qdem=zeros(7,1); xdem=zeros(5,7); util=zeros(5,1); lqa=zeros(5,1);
dudx=zeros(5,7); dxdqkij=zeros(35,7); dwdu=zeros(5,1);
dvdq=zeros(7,1); dxdq0=zeros(5,7); sumdxdqi=zeros(7,1);
pxq=zeros(7,1); blq=zeros(7,1); dxisum=zeros(7,7);
qerror=zeros(7,1); absqerror=zeros(7,1); muij=zeros(12,1);
xjtotal=zeros(5,1); ltotal=0; lambda=0; evaluate=0; sigma=0;
minerror = 0;
/**** Table 6-1 *****/
let a ={31.5  4.0  2.8  2.4  3.2  1.3  0.2,
        35.9  9.4  8.0  3.5  8.7  5.1  5.4,
        37.8 10.5  8.6  3.6 11.6  6.2  8.9,
        41.8 14.0 12.0  5.1 16.9 10.0 16.1,
        58.1 39.8 58.0 18.9 49.2 41.0 55.6};

```

```

let b = {0.134 0.192 0.149 0.083 0.126 0.159 0.157,
         0.134 0.192 0.149 0.083 0.126 0.159 0.157,
         0.134 0.192 0.149 0.083 0.126 0.159 0.157,
         0.134 0.192 0.149 0.083 0.126 0.159 0.157,
         0.040 0.114 0.274 0.075 0.149 0.160 0.188};

/***** Table 6-2 *****/

let p = 199.5 189.8 172.3 173.9 196.5 170.5 206.8;
let li = 91162 113926 132277 150200 197908;

/***** Table 6-4 *****/

let r = 0.05 0.1;
let nu = -5 -1 0.01 0.5 1 1.5;

format 12,8;

maxiter = 150; maxtol = 0.00005;

/***** initial values *****/
    rval = 0.1;      /* rval = r (0.05,0.1) */
    nuval = -5.0;    /* nuval= nu (-5,-1,0.01,0.5,1,1.5) */
    mu = 5e+13;      /* ajustment parameter */

/***** recommended configurations *****/
** if nu == -5 then nuval=-5 and mu=5e+13;
** if nu == -1 then nuval=-1 and mu=5e+6;
** if nu = 0.01 then nuval=0.01 and mu=4e+4;
** if nu == 0.5 then nuval=0.5 and mu=1000;
** if nu == 1 then nuval=1 and mu=10;
** if nu == 1.5 then nuval=1.5 and mu=10;

*****/

q1 = p; qdem = q1;
ltotal = sumc(li);

/**** call procedures */

demand();

utility();

newprice();

itnumber = 1;

do while itnumber <= maxiter;
    if minerror < maxtol;
        break;

```

```

endif;

    iteration();

    itnumber = itnumber + 1;
endo;

/** results ***/
    print "solution";
    print "r = " rval;
    print "nu = " nuval;
    print "iteration number = " itnumber;

t = (q3-p)./p;

    for j (1, ngood, 1); print "q3[" j "] = " q3[j]; endfor;
    for j (1, ngood, 1); print "t[" j "] = " t[j]; endfor;

/***** iteration *****/
proc (0) = iteration();

    q1 = q3; qdem = q3;

    demand();

    utility();

    newprice();

ret;
end;

/***** demand *****/
proc (0) = demand();

    local sum;

    /* input is qdem[j] , output is xdem[j][i] */
    lqa = li - a*qdem;
    xdem = a + (lqa.*b)./(qdem');

ret;
end;

proc (0) = utility();

    local mpro, sum, sum2;

    xa = xdem - a;

    util = prodc((xa.^b)');

    dux = util.*(b./xa);

    for i (1, nhousehold, 1);

```

```

    for k (1, ngood ,1);
        for j (1, ngood,1);
            dxdqkij[(i-1)*7+k,j] = b[i,k]*((-1)*a[i,j])/qdem[k];
            if k == j;
                dxdqkij[(i-1)*7+j,j]=
                    b[i,j]*(qdem[j]*(-1)*a[i,j]-lqa[i])/(qdem[j]^2);
            endif;
        endfor;
    endfor;

endfor;

dwdu = util.^(nuval-1);

for j (1, ngood ,1);
    sum2=0;
    for k ( 1, ngood ,1);
        sum=0;
        for i ( 1, nhousehold ,1);
            sum=sum+dwdu[i]*dudx[i,k]*dxdqkij[(i-1)*7+k,j];
        endfor;
        sum2 = sum2 + sum;
    endfor;
    dvdq[j] = sum2;
endfor;

retp;

endp;

proc (0) = newprice();
    local sum, sum2, work, mumin;
    dxisum = dxdqkij[1:7,.] + dxdqkij[8:14,.] +
        dxdqkij[15:21,.] + dxdqkij[22:28,.] +
        dxdqkij[29:35,.];
    pxq = dxisum'*p;
    sum = dvdq'*pxq;
    sum2 =ones(ngood,1)'(pxq.^2);
    lambda = sum/sum2;
    deltaq = dvdq - lambda*pxq;

```

```

q2 = q1 + mu*deltaq;
qdem = q2;
demand();
xjtotal = xdem'*ones(nhousehold,1);
evaluate = p'*xjtotal;
sigma = evaluate/((1-rval)*lttotal);
print " sigma= " sigma;
q3 =sigma*q2 ;
absqerror = abs(q3-q1);
minerror = minc(absqerror);
retp;
endp;

* * * * * Apendix-4B * * * * *
*** yamada-1991-chap6.gms
*** GAMS: CONOPT
*****
sets      i  households / h1*h5 /
          j  commodities / c1*c7 /;
alias (i,h);
alias (j,c);
parameters
table a(j,i)  utility parameters
          h1      h2      h3      h4      h5
c1      31.5     35.9     37.8     41.8     58.1
c2       4.0      9.4     10.5     14.0     39.8
c3       2.8      8.0      8.6     12.0     58.0
c4       2.4      3.5      3.6      5.1     18.9
c5       3.2      8.7     11.6     16.9     49.2
c6       1.3      5.1      6.2     10.0     41.0
c7       0.2      5.4      8.9     16.1     55.6;

table b(j,i)  expenditure share
          h1      h2      h3      h4      h5
c1      0.134     0.134     0.134     0.134     0.040

```

```

c2      0.192      0.192      0.192      0.192      0.114
c3      0.149      0.149      0.149      0.149      0.274
c4      0.083      0.083      0.083      0.083      0.075
c5      0.126      0.126      0.126      0.126      0.149
c6      0.159      0.159      0.159      0.159      0.160
c7      0.157      0.157      0.157      0.157      0.188;

parameter  l(h)   labor supply
           / h1 91162, h2 113926, h3 132277, h4 150200, h5 197908 /;
parameter  p(c)   producer prices
           /c1 199.5, c2 189.8, c3 172.3, c4 173.9, c5 196.5, c6 170.5, c7 206.8/;
parameter  rho   parameter of social welfare function / 0.1 /;
parameter  r     level of tax revenue / 0.05 /;
variables
lqa(i)   part lqa
x(j,i)   demand
t(j)     tax rate
u(i)     utility function
SW       social welfare function;
equations
eqLQA(i)   part of consumer demand
eqX(j,i)   consumer demand
eqU(i)     utility
eqT        tax revenue constraint
eqSW       social welfare;
eqLQA(i) ..   lqa(i) =E= l(i) - sum(c, (1+t(c))*p(c)*a(c,i));
eqX(j,i) ..   x(j,i) =E= a(j,i) + b(j,i)*lqa(i)/((1+t(j))*p(j));
eqU(i) ..   u(i) =E= lqa(i)/prod(c, ((1+t(c))*p(c))*b(c,i));
eqT ..       sum(c, t(c)*p(c)*sum(h, x(c,h))) =E= r*sum(h, l(h));
eqSW..       sw =E= sum(h, u(h)**rho)/rho;
t.lo(j) = 0.001;
t.up(j) = 0.4;
t.l(j) = 0.05;
model  OT /all/;
Option NLP = CONOPT;

```


solve OT using NLP maximizing SW;

***** Appendix-5 *****

*** kwz1990.gms

*** Kaiser-Wiegard-Zimmermann's Optimal Tax Model

*** GAMS: CONOPT

sets i households / h1*h10 /

j commodities / c1*c11 /;

alias (i,h);

alias (j,c);

parameters

nh(i) number of households in each group

yh(i) income of each group

b(j) parameter of utility function

gm0(j) expenditure share

gm(j) expenditure

vatrate(j) VAT rate

p(j) producer price

ttot tax revenue constraint;

parameter nh(i) number of households

/ h1 1872, h2 3286, h3 5213, h4 6835, h5 7296, h6 6657, h7 5066 ,

h8 3441, h9 2270, h10 4137 /;

parameter yh(i) income of each group

/ h1 8588, h2 13057, h3 17790, h4 22029, h5 26126, h6 29711, h7 33292,

h8 36629 , h9 40043, h10 47970 /;

parameter b(j) utility parameter

/ c1 0.111, c2 0.029, c3 0.054, c4 0.094, c5 0.142, c6 0.032, c7 0.122,

c8 0.210, c9 0.062, c10 0.092, c11 0.052 /;

parameter gm(j) parameter of committed expenditure

/ c1 0.292, c2 0.080, c3 0.042, c4 0.073, c5 0.248 , c6 0.114, c7 0.073,

c8 0.011, c9 0.004, c10 0.045, c11 0.018 /;

parameter vatrate(j) vat rate

/ c1 0.06, c2 0.06, c3 0.06, c4 0.12, c5 0.0, c6 0.12, c7 0.12, c8 0.12,

c9 0.12, c10 0.12, c11 0.12 /;

```

parameter rho    weight of social welfare function    / 0.8 /;
parameter ttot   tax revenue of government(DM)    / 105854480 /;

    p(j) = 1.0/(1.0+vatrate(j));

    gm(j)=gm0(j)*7000;

positive variables

lqa(i)    part lqa
x(j,i)    demand;

variables

t(j)      tax rate
u(i)      utility function
SW        social welfare function;

equations

eqLQA(i)   part of consumer demand
eqX(j,i)   consumer demand
eqU(i)     utility
eqT        tax revenue
eqSW       social welfare;

eqLQA(i) ..    lqa(i) =E= yh(i) - sum(c, (1+t(c))*p(c)*gm(c));
eqX(j,i) ..    x(j,i) =E= gm(j) + b(j)*lqa(i)/((1+t(j))*p(j));
eqU(i) ..    u(i) =E= lqa(i)/prod(c, ((1+t(c))*p(c))*b(c));
eqT ..    sum(c, t(c)*p(c)*sum(h, nh(h)*x(c, h))) =E= ttot;
eqSW..    sw =E= sum(h, u(h)**rho)/rho;

t.lo(j) = 0.001;
t.up(j) = 0.4;
u.lo(i) = 0.0001;
x.lo(j,i) = 0.0001;

option decimals =5;

model    OT /all/;

solve OT using NLP maximizing SW;

display t.l;

```

注

- 1) 一般均衡モデルの数値的方法については、Ginsburgh-Keyzer(1997)、Judd(1998)に詳しい説明がある。また、均衡解の計算の困難さや複数均衡問題については Kehoe (1991)を、最近の政策分析のための一般均衡モデル構築、モデルの解法、シミュレー

- ション分析などについては, Fehr-Rosenberg-Wiegard(1995), Fehr-Wiegard(1995), Fossati-Wiegard(2002), Harrison, G. W. et al. (eds.) (2000)を参照されたい。なお, 最適課税分析について, 理論モデル, モデルの解法のアルゴリズム, 解法の計算プログラムのすべてにわたっていわば模範を示しているのは福島(1993)である。
- 2) Scarf のアルゴリズムについては Scarf(1973)を, また, 非線形計画法を含む数値解法のアルゴリズム一般については Judd(1998)を参照されたい。GAUSS や Fortran を用いてアルゴリズムをプログラミングする場合は Judd(1998)が有用である。
 - 3) Merrill アルゴリズムについては, Shoven-Whalley(1992), 市岡(1991)に詳しい説明がある。本稿での Merrill アルゴリズムのプログラムは, Shoven-Whalley の解説を基に GAUSS で作成している。Merrill アルゴリズムではプログラムが複雑になる原因は財の数である。10 財モデルであるから, Merrill アルゴリズムでは単体が 11 行 11 列の行列で表される。ここで示したプログラムは, 5 家計 10 財モデルのものであるから, 大きなサイズの一般均衡モデルでも使える一般性を有しているといえる。
 - 4) GAMS VIS21.4 139 を用いている。
 - 5) Scarf(1973, p. 67; 1984, p. 31)では, 近似均衡解が, 0.187, 0.109, 0.099, 0.043, 0.117, 0.077, 0.117, 0.102, 0.099, 0.049, で与えられている。ここで得られた近似均衡解と異なるが計算精度による誤差とみなせる。ちなみに, Merrill アルゴリズムを用いて計算した場合でも, スタートの近似価格の設定と格子サイズの更新の指定の仕方で Scarf と同じ結果を得る。超過需要の絶対値の総和を 10^{-6} 以下とした場合, 近似均衡解として, 0.1873, 0.1094, 0.0989, 0.0432, 0.1169, 0.0770, 0.1170, 0.1024, 0.0987, 0.0494, が得られる。
 - 6) Harris-MacKinnon(1979), pp. 207-208 を参照のこと。
 - 7) Rowse(1985), p. 221, Table 2 を参照されたい。ここで得られた解と同一であることが確認できる。また, Harris-MacKinnon(1979), p. 208, Table 2 と比較されたい。なお, 商品税に関する分析的結果と実証分析結果の展望については Ray(1997), Kaiser-Spahn(1989)を参照されたい。
 - 8) 山田(1991), 第 6 章。家計区分は『家計調査年報』の 5 分位階級区分に基づき, 各階級の家計数が同じになるように構成されている。したがって, 家計数の大小そのものは最適税率に全く影響しない。
 - 9) 労働供給量は 1976 年のデータに基づいている。
 - 10) 財については, 財 1 が主食・副食, 財 2 が嗜好食品, 財 3 が住居, 財 4 が光熱, 財 5 が医療・交通・通信, 財 7 が教育・娯楽, にそれぞれ分類されている。
 - 11) μ の値の決定の仕方に関しては, 山田(1991), p. 225, (12)式を参照されたい。 μ の値の決定の仕方が比較的複雑であるので, 本稿のプログラムでは設定を簡略化している。具体的にはプログラムの注意書きを参照されたい。

- 12) 山田(1991)では税率を%で示している関係で小数点以下3桁まで求めているが、ここでは小数点以下4桁まで求めている。なお、数値分析を含めて、最適消費税の構造についてはKaize-Spahn(1989)を参照。
- 13) ちなみに、各財の超過需要について誤差の絶対値をとりその総和を 10^{-6} 以下とした場合、税率は、0.0530, 0.0531, 0.0518, 0.0527, 0.0525, 0.0527, 0.0524, となり、ほぼ5%の一律税率に近い結果が得られる。したがって、許容誤差の大小で局所最適解の振る舞いが不安定になるのかもしれない。
- 14) 財1から財11はそれぞれ、食料、準奢侈食品、外食、衣料・靴、住宅、電気、他のサービス、交通・通信、保健衛生、教育・娯楽、備品、である。
- 15) 現実の付加価値税率は、1978年のデータで、財1～財4は0.06、財5は仮定によりゼロ税率、財6～財11は0.12、である。
- 16) Kaizer-Wiegard-Zimmermann(1990), p.89, Table 4を参照。
- 17) 第1産業から第5産業はそれぞれ、農林水産業、製造業、貿易・運輸・公益事業、金融・保険業(住宅産業を含む)、公共部門、である。
- 18) 労働および資本に対する租税はそれぞれ、賃金に従価税率で課税する社会保障税および資本所得に従価税率で課税する営業収益税と営業資本税を指す。
- 19) 方程式体系はすべての価格および外生的所得についてゼロ次同次であるから正規化して $w=1$ とする。また、ワルラスの法則から、すべての市場が均衡している時には政府予算も均衡する。なお、政府の予算制約に関するパラメーターは、 T^L , T^K , T^Q については投入・産出表で、また、 T^C , T_r , A については、 $T^C=(0.62, 36.70, 4.59, 9.39, 0.0)$, $T_r=235.31$, $A=127.66$ で与えられている。さらに、体系外から与えられるパラメーターは、 $\sigma=(0.7, 0.8, 0.75, 0.75, 0.9)$ 、労働の純賃金率弾力性 $e=0.15$ 、時間賦存・労働比率 $\varsigma=E/L=1.75$ 、輸出弾力性 $\theta=-10.0$ 、輸入弾力性 $\eta=0.12$ 、である。
- 20) カリブレーションのための設定として、初期均衡において要素価格と税抜きの商品価格がすべて1、つまり $w, r, p_1, p_2, \dots, p_5$ が1、であると想定される。税率について

は、投入・産出表および T^C のデータから、 $\tau_j^L = T_j^L / wL_j$, $\tau_j^K = T_j^K / rK_j$,

$\tau_j^C = T_j^C / p_j C_j$, $\tau_j^Q = T_j^Q / p_j Q_j$ を用いて計算できる。ここでは、カリブレーション

の手続きを省略し、その他の必要なパラメーター値は所与であるとする。カリブレーションについては、Hirte-Wiegard(1988), pp.181-185を参照されたい。カリブレーションからは、 $\delta=(0.1384, 0.8270, 0.6823, 0.3628, 0.7341)$, $\phi=(1.5154, 1.8072, 1.8466, 2.0723, 1.8046)$, $\alpha=(0.0144, 0.5201, 0.2147, 0.2509)$, $\nu=0.9348$, $\beta=0.3503$, $\lambda=(0.0016, 0.9200, 0.509,)$, $\tau^y=0.25$, が決定される。

21) 初期値として $w_0 + r_0 + \tau_0^{vati} = 1$, また賃金率は正規化して $w_0 = 1$ とされるから, 数値

計算においては, たとえば $w = 1$, $r = r_0 / w_0$, $\tau^{vati} = \tau_0^{vati} / w_0$ とする。Shoven-

Whalley(1992), pp.59-62 を参照。

22) 租税の代替によって通常は価格が変化するから, 政府が同一税収を得るという場合の同一税収の基準が問題になる。基準としては同一の実質税収が同一ということであろう。また, 価格変化の調整のため, 一般的にはラスパイレス物価指数が用いられよう。この点については, Shoven-Whalley(1992), pp. 59-62 を参照。

23) 変数は w , r , τ^{vati} の 3 変数, 超過需要の式は労働, 資本, 政府予算の 3 本であるから, (6.24) および (6.26) を用いる場合と比較して, 不動点アルゴリズムの構造が簡明になる。Shoven-Whalley(1992), pp. 57-62 を参照。

24) Hirte-Wiegard(1988), p.187, Table 4 を参照されたい。本稿では GAUSS を用いて Merrill アルゴリズムをプログラミングしている。また, 逆行列およびニュートン法は GAUSS に組み込まれた計算ルーティンを用いている。

参考文献

- Deaton, A. (1977), "Equity, Efficiency, and the Structure of Indirect Taxation," *Journal of Public Economics*, 8, 299-312.
- Fehr, H., Rosenberg, C. and W. Wiegard (1995), *Welfare Effects of Value-Added Tax Harmonization in Europe*, Springer-Verlag.
- Fehr, H. and W. Wiegard (1995), "A CGE Examination of Worldwide Agricultural Liberalisation Policies: Model Structure and Preliminary Results," in A. Fossati (ed.), *Economic Modelling under the Applied General Equilibrium Approach*, Avebury, 143-211.
- Fossati, A. and W. Wiegard (2002), *Policy Evaluation with Computable General Equilibrium Models*, Routledge.
- 福島隆司 (1993), 『漸進的政策勧告の経済学』創文社.
- Ginsburgh, V. and M. Keyzer (1997), *The Structure of Applied General Equilibrium Models*, MIT Press.
- Harris, R. G. and J. G. MacKinnon (1979), "Computing Optimal Tax Equilibria," *Journal of Public Economics*, 11, 197-212.
- Harrison, G. W., et al. (eds.) (2000), *Using Dynamic General Equilibrium Models for Policy Analysis*, North-Holland.
- Hirte, G. and W. Wiegard (1988), "An Introduction to Applied General

- Equilibrium Modelling," in D. Bös, M. Rose and C. Seidel (eds.), *Welfare and Efficiency in Public Economics*, 167-203.
- 市岡 修(1991),『応用一般均衡分析』有斐閣.
- Judd, K. L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, MIT Press.
- Kaiser, H. and P. B. Spahn (1989), "On the Efficiency and Distributive Justice of Consumption Taxes: A Study on VAT in West Germany," *Journal of Economics*, 49, 199-218.
- Kaiser, H., Wiegard, W. and G. Zimmermann (1990), "Testing the Reliability of Optimal Tax Calculations," *Finanzarchiv*, N. F. 48, 77-96.
- Kehoe, T. J. (1991), "Computation and Multiplicity of Equilibria," in E. Hildenbrand and H. Sonnenschein (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. IV, Amsterdam: North-Holland, 2049-2143.
- Ray, R. (1997), Issues in the Design and Reform of Commodity Taxes: Analytical Results and Empirical Evidence," *Journal of Economic Survey*, 11, 353-388.
- Rowse, J. (1985), "On the Solution of Optimal Tax Models and Other Optimization Models in Economics," *Economics Letters*, 18, 217-222.
- Scarf, H. H. (1973), *Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press.
- Scarf, H. H. (1984), "The Computation of Equilibrium Prices," in H. E. Scarf and J. B. Shoven (eds.), *Applied General Equilibrium Analysis*, Cambridge University Press, 1-49.
- Shoven, J. B. and J. Whalley (1992), *Applying General Equilibrium*, Cambridge University Press.
- Suruga, T. (1980), "Consumption Patterns and Price Indices of Yearly Income Quintile Groups: The Case of Japan 1963-1976," *Economic Studies Quarterly*, 31, 23-32.
- 山田雅俊(1991),『現代租税理論』創文社.

提出年月日 : 2004 年 12 月 13 日