$x, y \in \mathbb{R}$ に対して $J_{x,y} := \{z \in \mathbb{Z} | x \leq z \leq y\}$ とおく。
$\mathbb{K}$ を体とする。

$k \in \mathbb{N}$, $m_a \in \mathbb{N}$ $(a \in J_{1,k})$ とし $n_b := \displaystyle\sum_{a=1}^{b} m_a$ $(b \in J_{0,k})$ とおく。C を $\mathbb{K}$ 上の n_k-次正方行列全体のなす環とする。($C = \mathrm{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ である。) $E_{ij} \in C$ を (i,j)-成分が 1 であって他の成分が 0 であるものとする。(E_{ij} を $E_{i,j}$ とも書く。) $I := \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} E_{ii}$ とおく。($I = 1_C$ である。) $\mathbb{K}$ を $\lambda \in \mathbb{K}$ を λI と同一視することによって C の部分環 $\{\lambda I | \lambda \in \mathbb{K}\}$ と同一視する。

$a \in J_{1,k}$, $i, j \in J_{1,m_a}$ に対して $E_{ij}^{(a)} := E_{n_{a-1}+i, n_{a-1}+j}$ とおく。等式

$$E_{ij}^{(a)} E_{pq}^{(b)} = \delta_{ab} \delta_{jp} E_{iq}^{(a)} \quad (a, b \in J_{1,k},\, i, j \in J_{1,m_a},\, p, q \in J_{1,m_b})$$

が成り立つ。C の部分環 A を $\{E_{ij}^{(a)} | a \in J_{1,k}, i, j \in J_{1,m_a}\}$ を $\mathbb{K}$-基底とするものとする。

A-加群 V と $v \in V$ に対して $Av := \{Xv | X \in A\}$, $\mathbb{K}v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\}$ とおく。(Av は V の A-部分加群である。)

A-加群 V と有限個の空でない V の部分集合 $H_1, \ldots, H_r$ に対して $\displaystyle\sum_{t=1}^{r} H_t := H_1 + \cdots + H_r := \{h_1 + \cdots + h_r | h_i \in H_i (i \in J_{1,r})\}$ とおく。

性質 (☆)『A-加群 W が性質 (☆) をもつ。』とはある $a \in J_{1,k}$ とある W の $\mathbb{K}$-基底 $\{w_1, \ldots, w_{m_a}\}$ があって等式

$$E_{ij}^{(b)} w_p = \begin{cases} \delta_{jp} w_i & (a = b \text{ のとき}) \\ 0 & (a \neq b \text{ のとき}) \end{cases}$$

$(b \in J_{1,k},\, i, j \in J_{1,m_b},\, p \in J_{1,m_a})$ を満たすときにいう。

問. V を $\{0\}$ ではない有限生成 A-加群とする。このとき『有限個の性質 (☆) をもつ V の A-部分加群 $W_1, \ldots, W_g$ があって $\mathbb{K}$-線形空間として $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_g$ が成り立つ。』ことを示せ。

つぎの Step 1〜Step 6 に沿った解答を作成せよ。

Step 1『有限個の V の元 $v_1, \ldots, v_d$ があって $V = Av_1 + \cdots + Av_d$ が成り立つ。』

Step 2『$V = \displaystyle\sum_{p=1}^{d} \sum_{a=1}^{k} \sum_{t=1}^{m_a} AE_{tt}^{(a)} v_p$ である。』

Step 3『$E_{tt}^{(a)} v_p = 0$ ならば $AE_{tt}^{(a)} v_p = \{0\}$ である。』($\because$ $X \in A$ とする。$XE_{tt}^{(a)} v_p = X0 = X0 + 0 = X0 + (X0 + (-X0)) = (X0 + X0) + (-X0) = X(0+0) + (-X0) = X0 + (-X0) = 0$ より Step 3 の主張が成り立つ。)

Step 4『$E_{tt}^{(a)} v_p \neq 0$ ならば $AE_{tt}^{(a)} v_p$ は $\{E_{1t}^{(a)} v_p, \ldots, E_{m_a t}^{(a)} v_p\}$ を $\mathbb{K}$-基底とする性質 (☆) をもつ V の A-部分加群である。』

Step 5『U を V の A-部分加群とし W を性質 (☆) をもつ V の A-部分加群とする。このとき $\neq \{0\}$ であるならば $W \subset U$ が成り立つ。』($\because$ W を $a \in J_{1,k}$ にたいする性質 (☆) をもつ A-部分加群とする W の $\mathbb{K}$-基底 $\{w_1, \ldots, w_{m_a}\}$ を $E_{ij}^{(b)} w_p = \delta_{ab} \delta_{jp} w_i$ を満たすものとする。$z \in U \cap W$ を $z \neq 0$ となるものとする。$z = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{m_a} w_a$ $(\lambda_p \in \mathbb{K}$ $(p \in J_{1,m_a}))$ と書いたとき $\lambda_t \neq 0$ となる $t \in J_{1,m_a}$ がある。このとき各 $i \in J_{1,m_a}$ にたいしてつぎの等式が成り立つ。$U \ni (\frac{1}{\lambda_t} E_{it}^{(a)}) z = \frac{1}{\lambda_t} (E_{it}^{(a)} z) = \frac{1}{\lambda_t} (\lambda_t w_i) = (\frac{1}{\lambda_t} \lambda_t) w_i = 1 w_i = w_i$ ($\mu \in \mathbb{K}$ と $\mu I \in A$ が同一視されていることに注意せよ。) $\{w_1, \ldots, w_{m_a}\}$ が W の $\mathbb{K}$-基底であるので $W \subset U$ が成り立つ。)

Step 6『Step 2〜Step 5 より問の主張が成り立つ。』