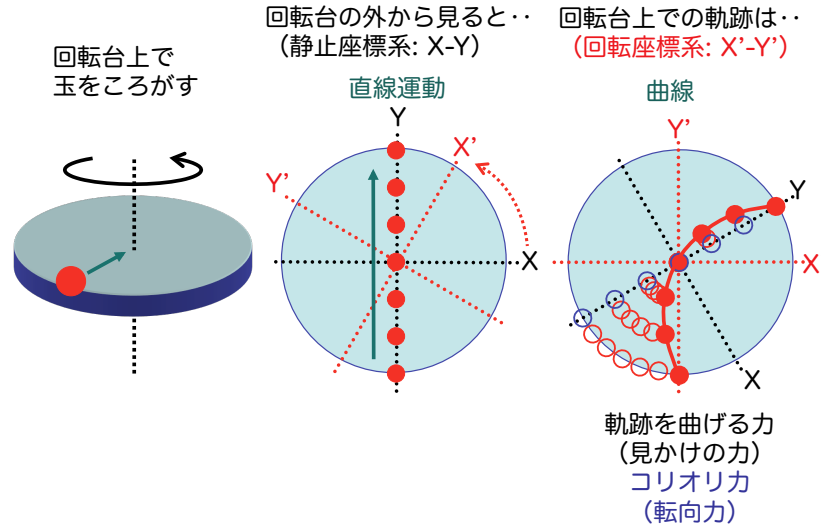


コリオリ効果



静止座標系 (xy) : P (x, y)
回転座標系 (XY) : P (X, Y) ... 角速度 ω

$$\begin{aligned} x &= X \cos \theta - Y \sin \theta = X \cos \omega t - Y \sin \omega t \\ y &= X \sin \theta + Y \cos \theta = X \sin \omega t + Y \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \dots ①$$

①を時間tで微分 (①の一階微分)

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

時間tでさらに微分 (①の二階微分)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2X}{dt^2} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} \\ &\quad + \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

①の二階微分をまとめると、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2X}{dt^2} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

赤線の部分を眺めると (変形すると)、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2X}{dt^2} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} \end{pmatrix} - 2\omega \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dt} \\ -\frac{dX}{dt} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

まとめると、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2X}{dt^2} - 2\omega \frac{dY}{dt} - \omega^2 X \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2\omega \frac{dX}{dt} - \omega^2 Y \end{pmatrix}$$

物体Pに働く力F: 静止座標系 (F_x, F_y) , 回転座標系 (F_X, F_Y)

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix}$$

静止座標系で物体Pの運動方程式

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

回転座標系で記載すると、

$$F_X = m \frac{d^2X}{dt^2} - 2m\omega \frac{dY}{dt} - m\omega^2 X$$

$$F_Y = m \frac{d^2Y}{dt^2} + 2m\omega \frac{dX}{dt} - m\omega^2 Y$$

回転座標系で物体Pの運動方程式

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = F_X + 2m\omega \frac{dY}{dt} + m\omega^2 X \quad m a_X = F_X + 2m\omega V_Y + m\omega^2 X$$

$$m \frac{d^2Y}{dt^2} = F_Y - 2m\omega \frac{dX}{dt} + m\omega^2 Y \quad m a_Y = F_Y - 2m\omega V_X + m\omega^2 Y$$

回転座標系では、実際働いている力Fの他に、**コリオリ力**と**遠心力**が作用しているように現れる

