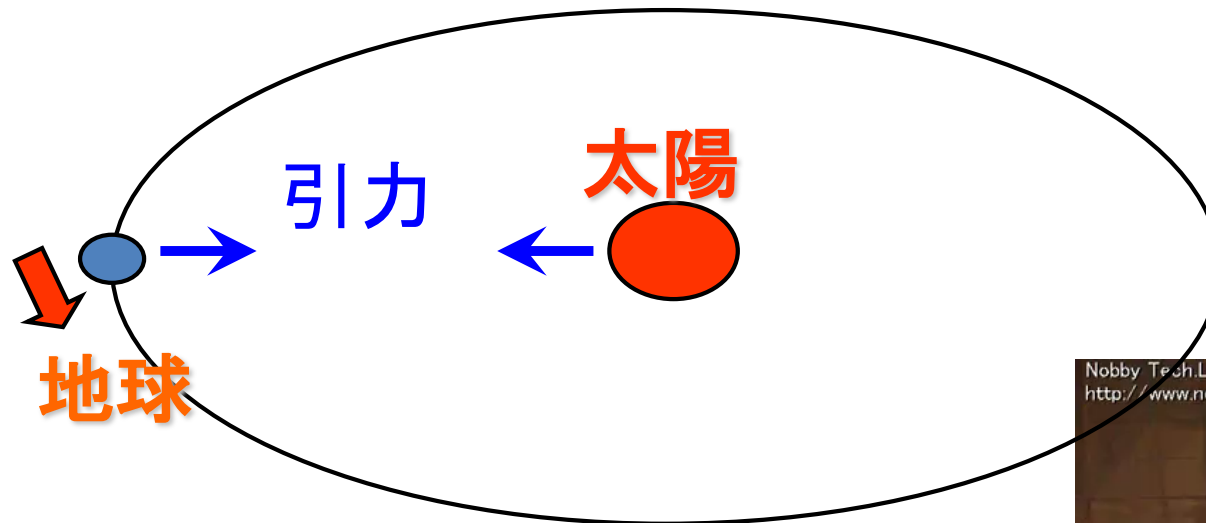


干涉計型 重力波検出器の基礎

2017/11/24 @富山大学

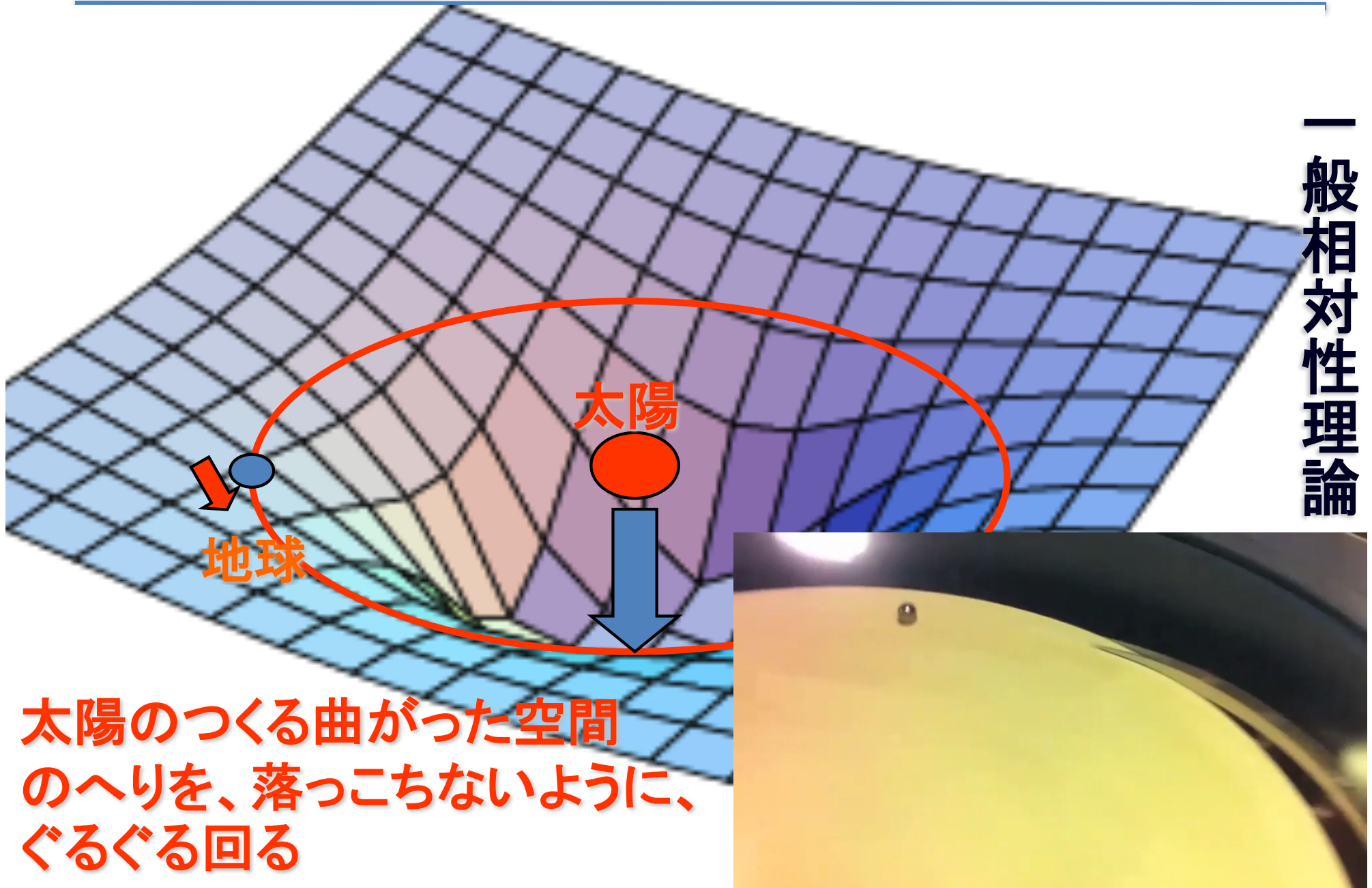
東京大学宇宙線研究所
宮川 治

地球には、太陽からの引力が働き、地球が飛び去るのを防いで、円運動をする



引力が無いと地球は飛んでいってしまう。





太陽のつくる曲がった空間のへりを、落っこちないように、ぐるぐる回る

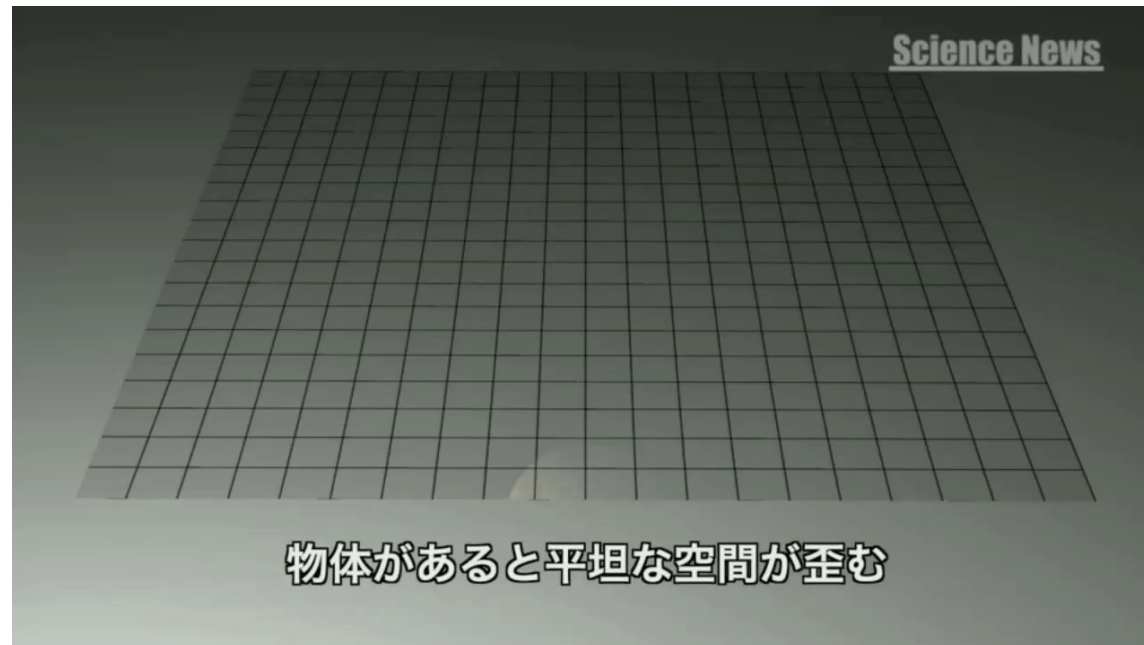
物体に働く力

ニュートン



空間や時間をゆがめる働き

アインシュタイン



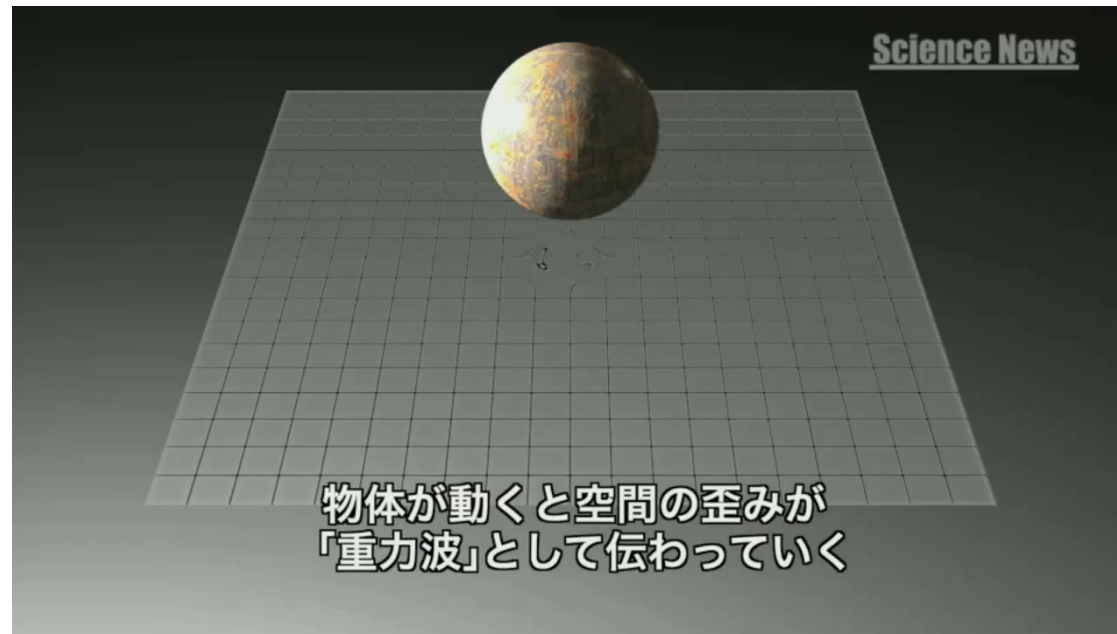
アインシュタインの予言：

非対称な質量の急激な変化による、波として光の速度で伝わる時空のひずみ



➡重力波が存在する!!

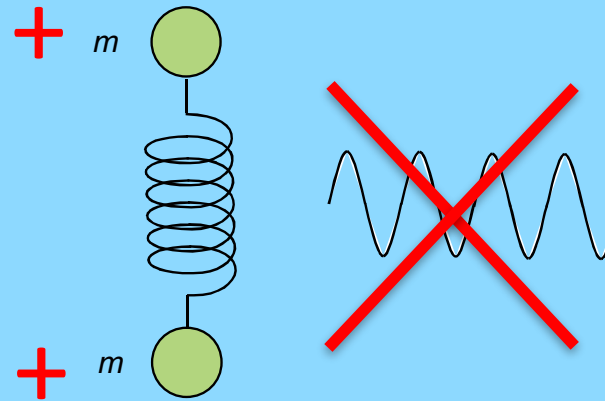
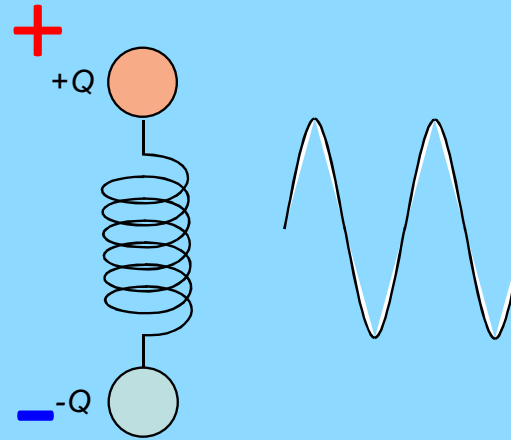
- 水やひもの代わりに、空間の「ゆがみ」が振動



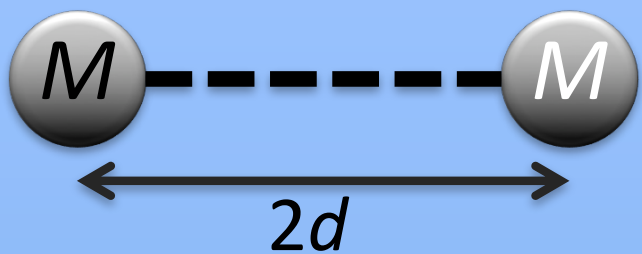
- 「ゆがみ」が、波として伝わる
- 伝わる速度は、光の速度と同じ: 1秒に30万km

電磁気学:
電荷の加速度
↓
電磁波

一般相対論:
質量の加速度
↓
重力波



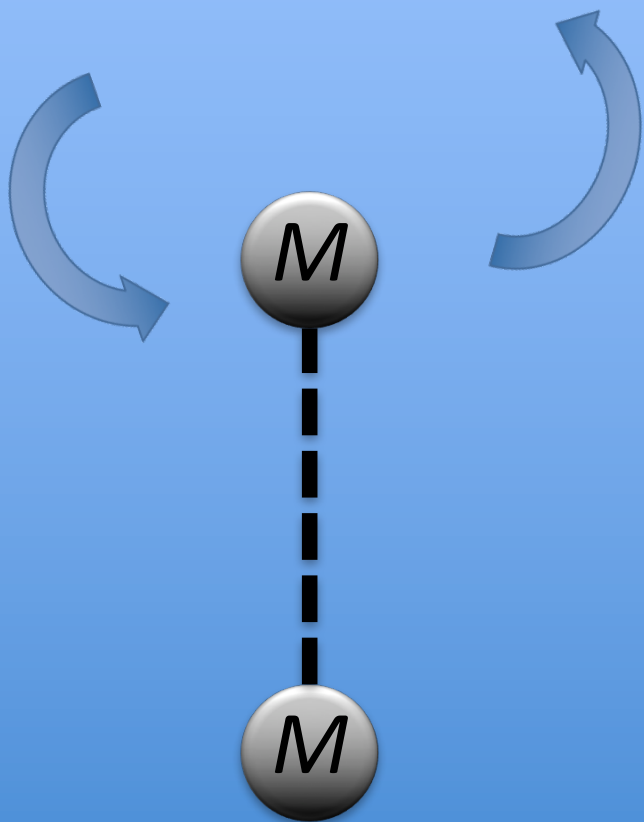
2質点



← 距離: R →

$$F = F_1 + F_2$$

観測者



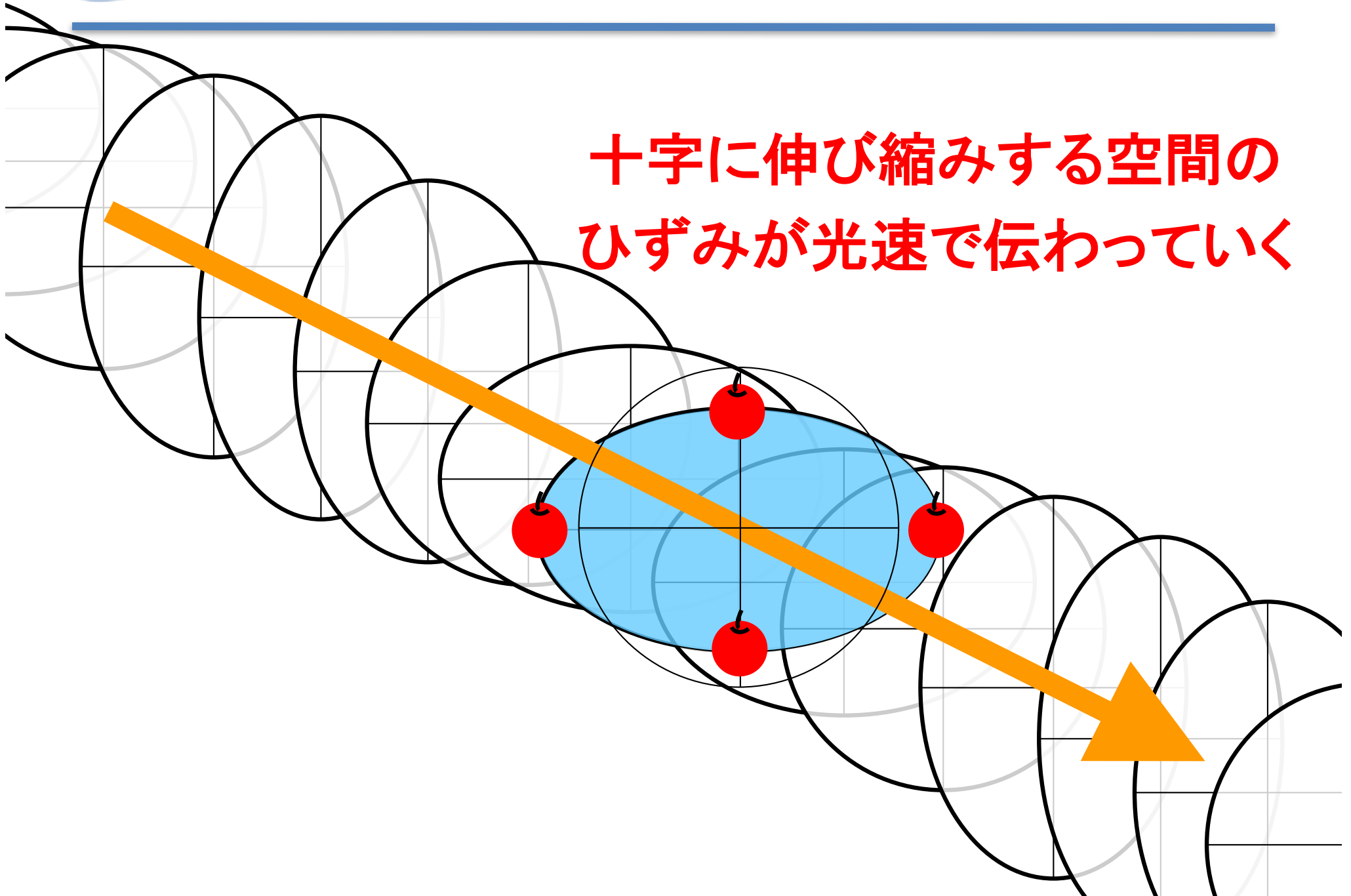
$$G \frac{M}{d^2} + G \frac{M}{(R-d)^2}$$

観測者



$$F \approx G \frac{M}{R^2} + G \frac{M}{R^2}$$

十字に伸び縮みする空間の
ひずみが光速で伝わっていく

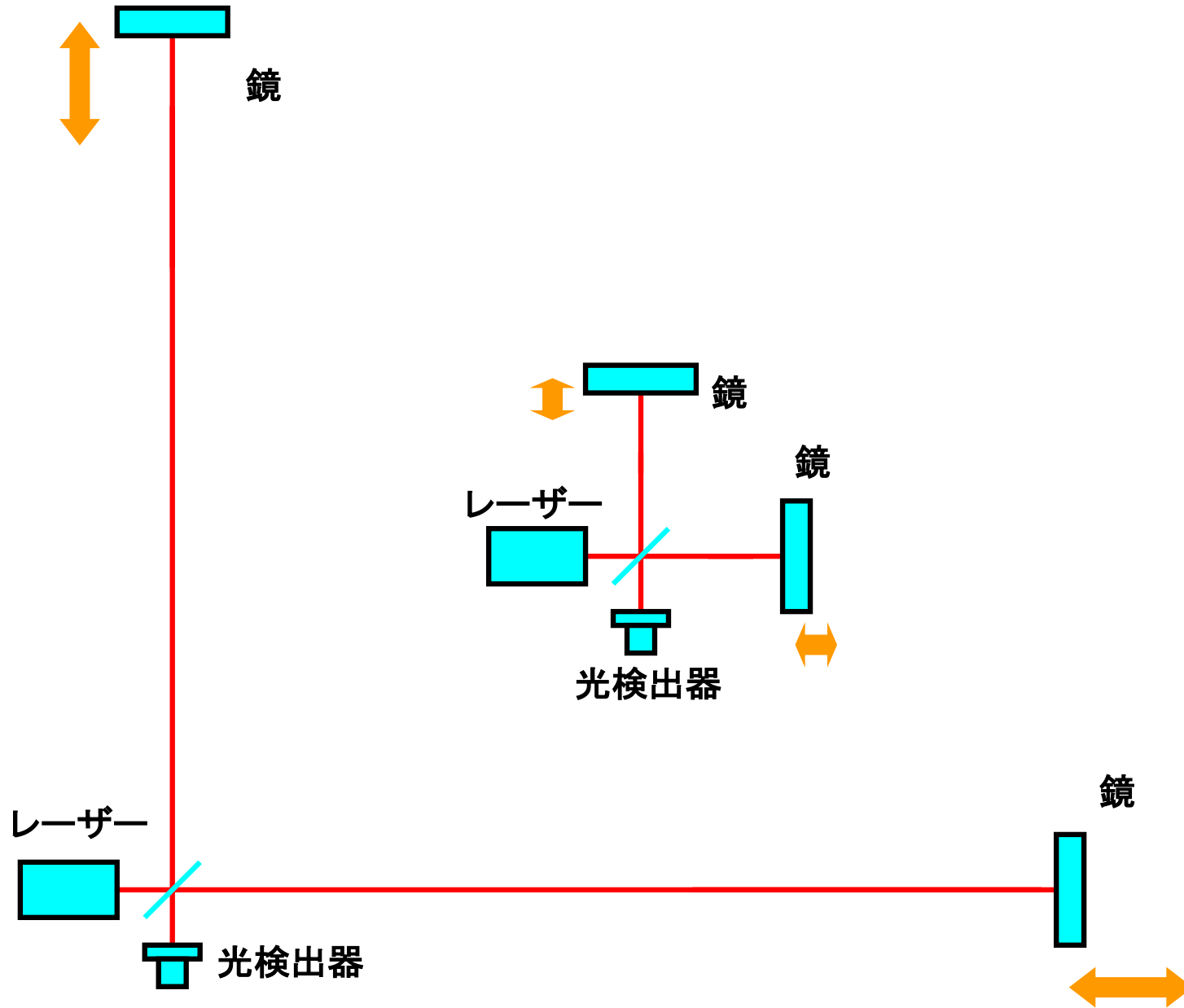


重力波をレーザー干渉計で見る



<https://www.ligo.caltech.edu/>

アーム長が長いほど感度が高い



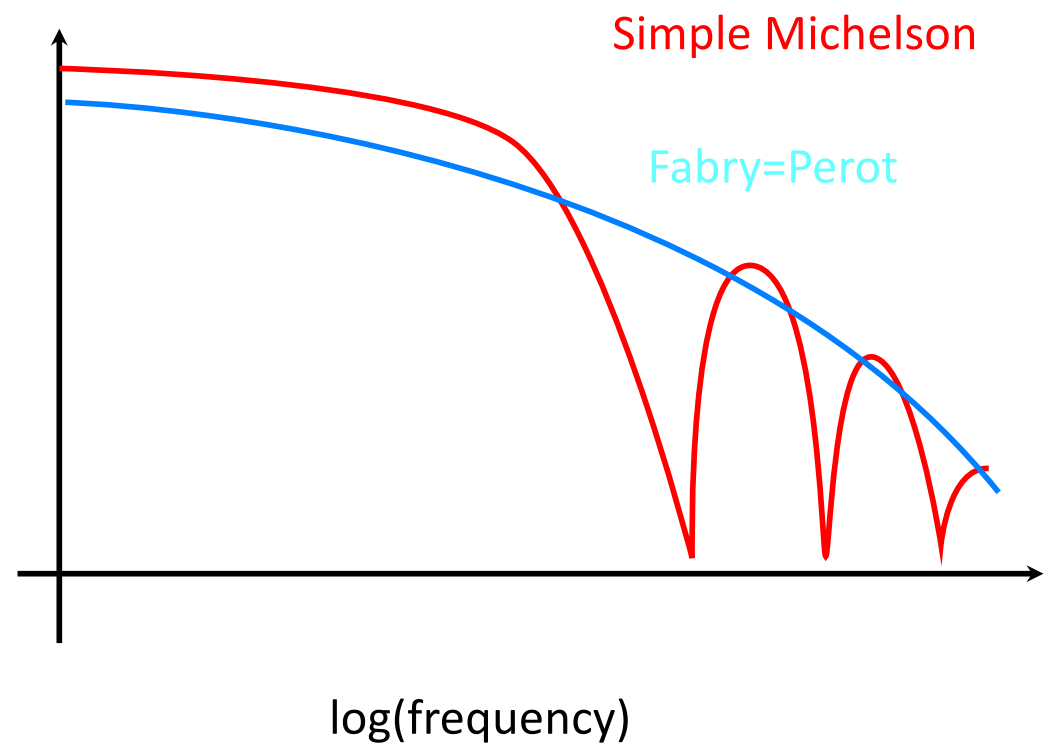


Q: 長ければ長い程いいのか?

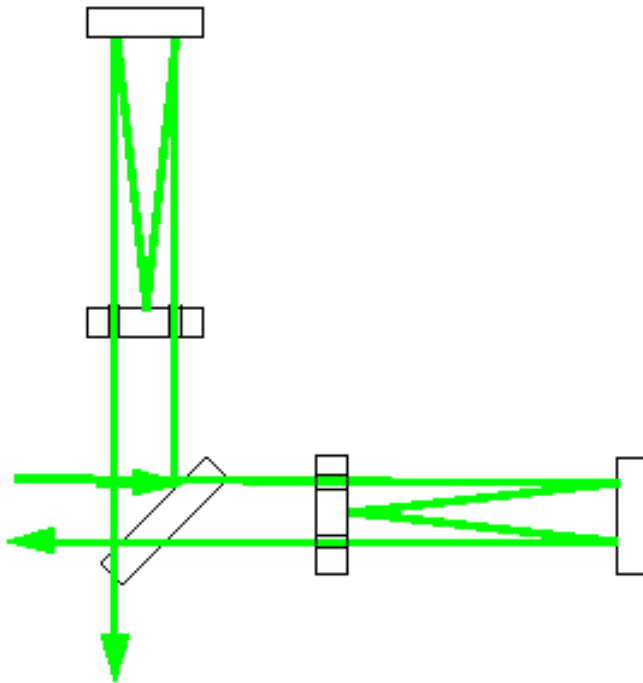
Ans : NO!

Reason : 光の速度が有限なため、高い周波数の重力波に対して干渉計の応答が小さくなる

$$\text{Response} = \log(|\text{output signal} / \text{input } h|)$$

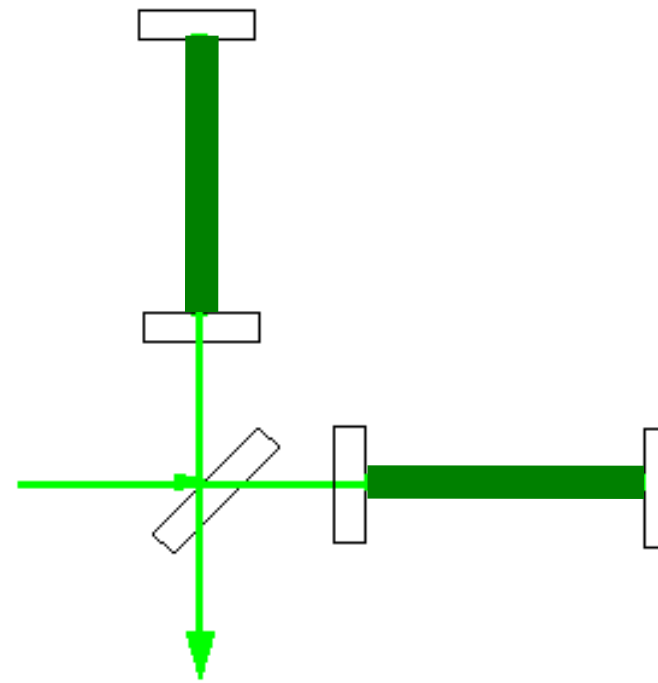


光を折り返す!



Delay line interferometer

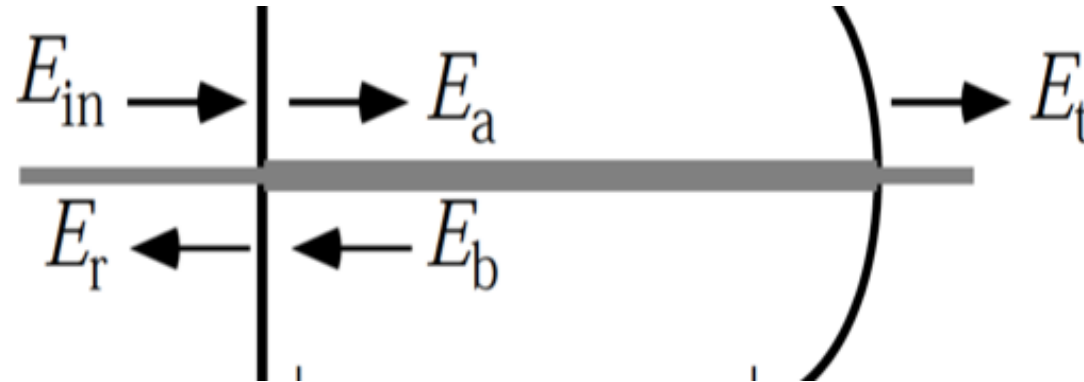
シンプル、光を通す小さな穴の空いた大きな鏡が必要、光の散乱が問題



Fabry Perot interferometer

合わせ鏡の原理で光を何度も往復
コンパクト、制御が困難

Fabry-Perot cavity



振幅透過率: t_F
 振幅反射率: r_F

振幅透過率: t_E
 振幅反射率: r_E

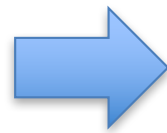
$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$$

$$E_a = t_F E_{\text{in}} + r_F E_b$$

$$E_b = r_E e^{-2i \frac{L\Omega}{c}} E_a$$

$$E_r = t_F E_b - r_F E_{\text{in}}$$

$$E_t = t_E e^{-i \frac{L\Omega}{c}} E_a$$

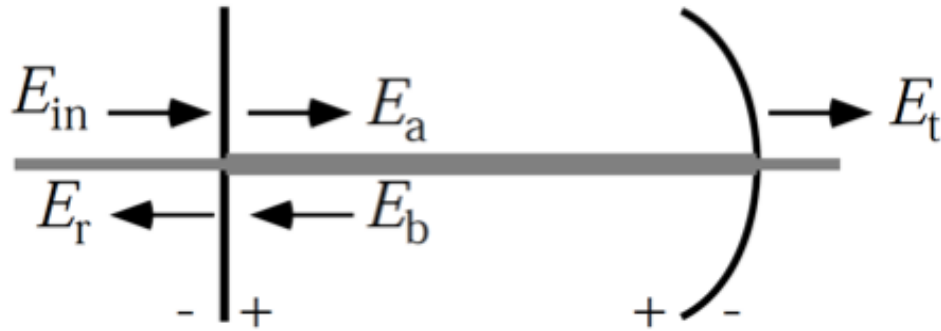


$$E_a = \frac{t_F}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} E_{\text{in}}$$

$$E_b = \frac{t_F r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} E_{\text{in}}$$

$$E_r = \left(-r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} \right) E_{\text{in}}$$

$$E_t = \frac{t_F t_E e^{-i \frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}} E_{\text{in}}$$



$$r_{\text{cav}}(\Phi) \equiv \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\Phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}}$$

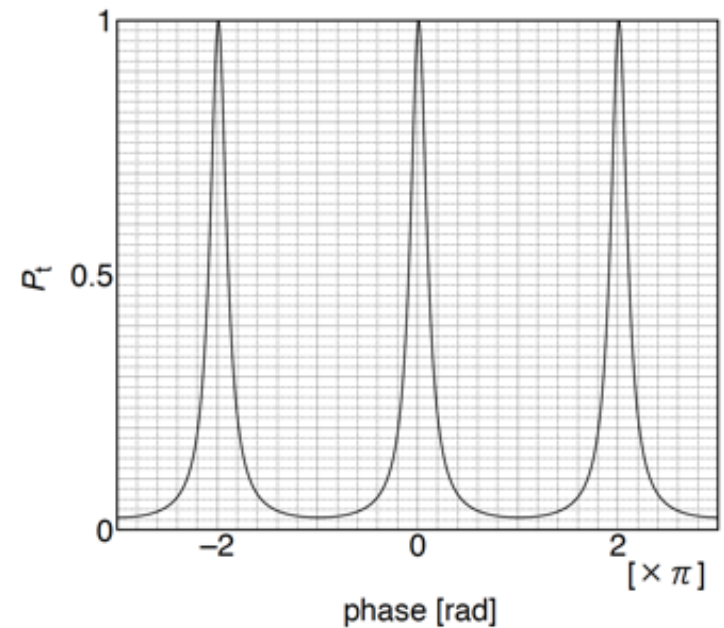
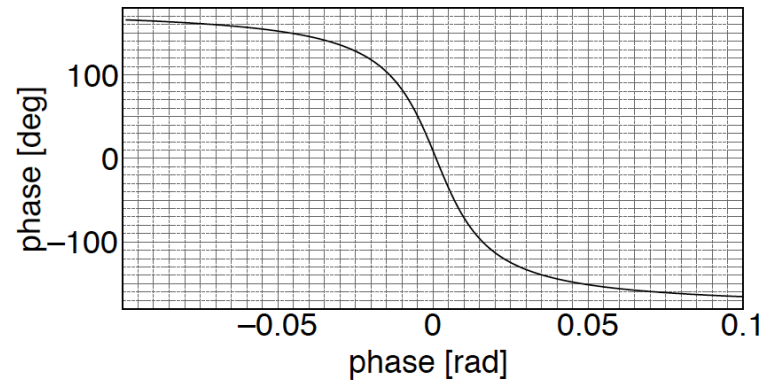
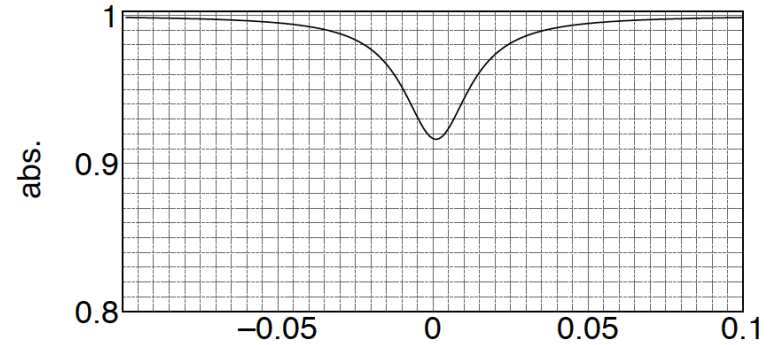
$$t_{\text{cav}}(\Phi) \equiv \frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_F t_E e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_F r_E e^{-i\Phi}}$$

折り返し回数

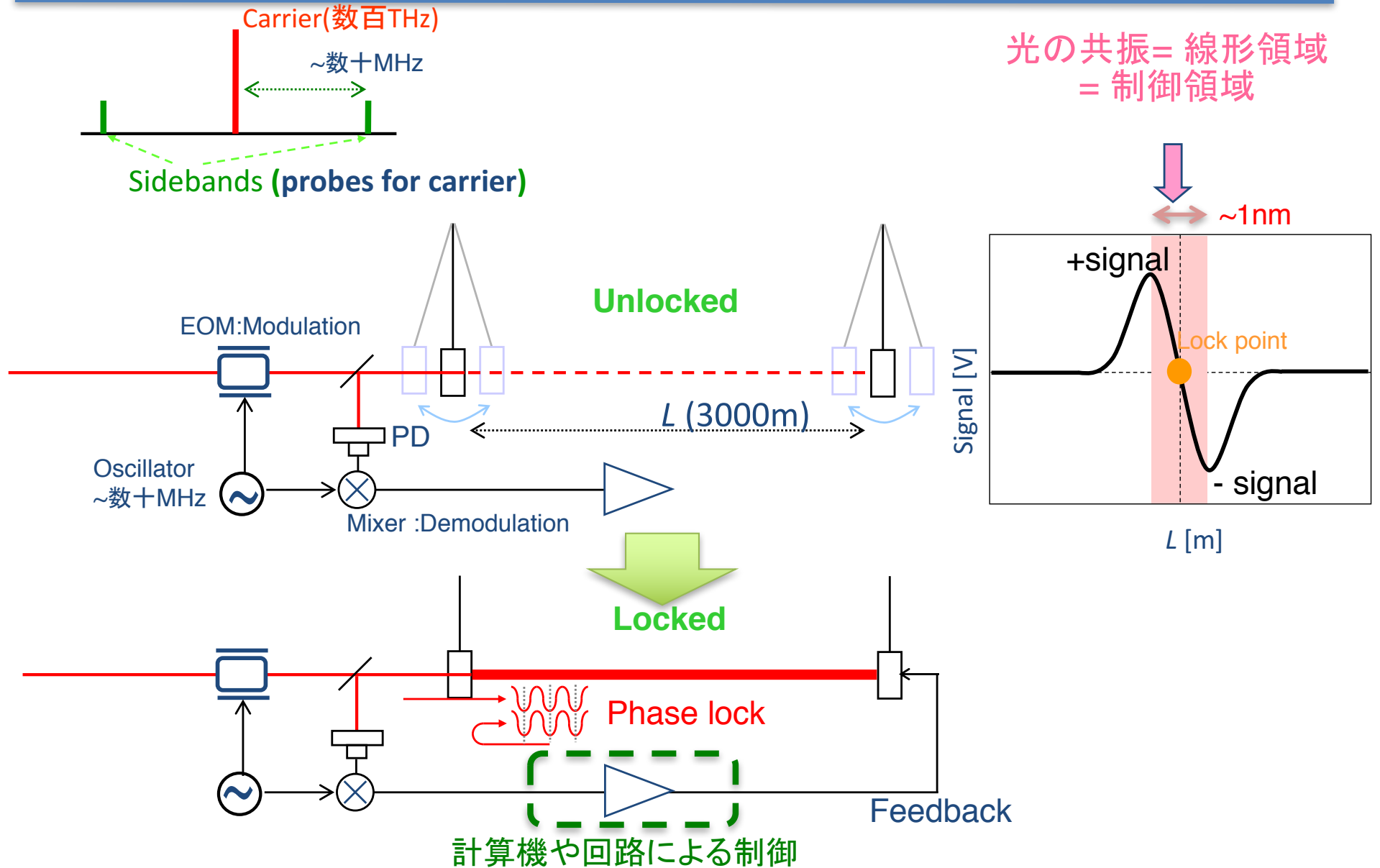
フィネス

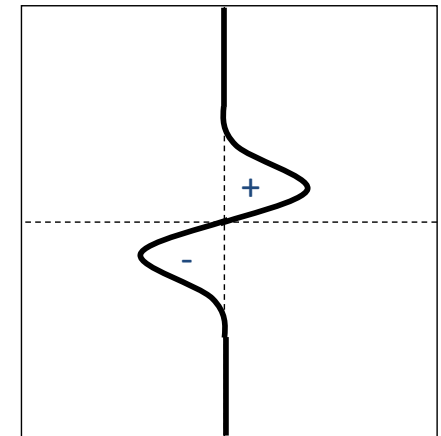
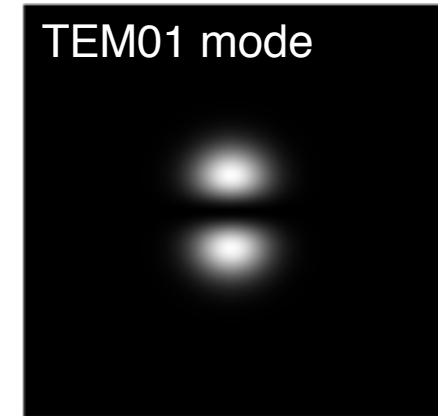
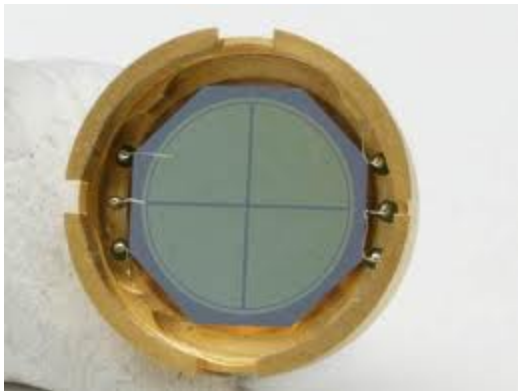
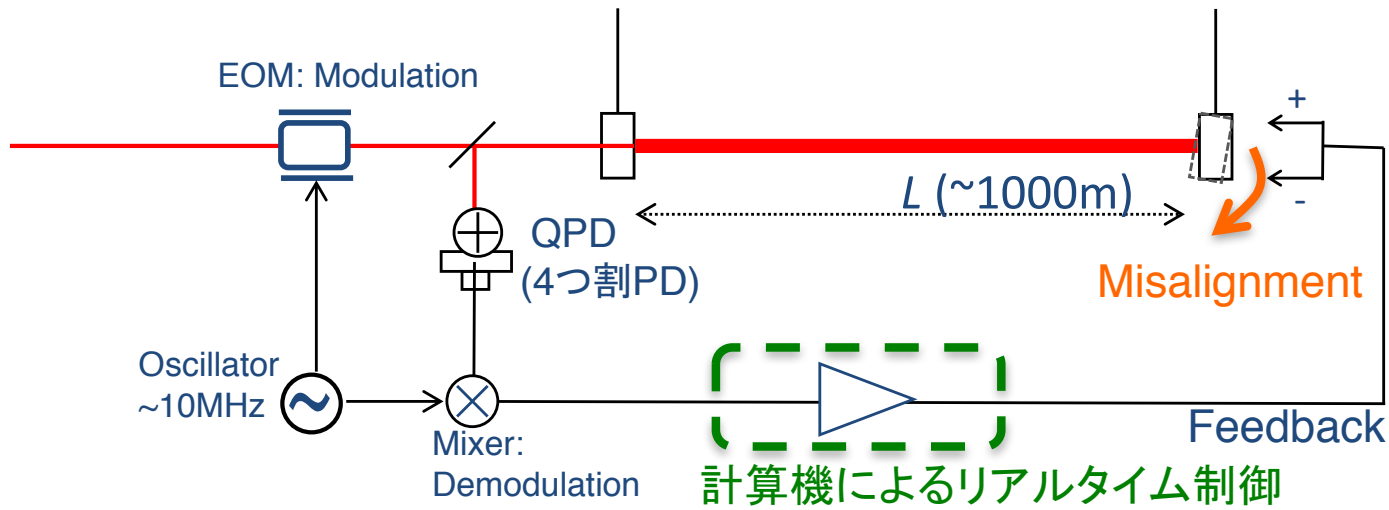
$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} \\ &= \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \end{aligned}$$

$$N_{FP} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} = \frac{2\sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E}$$



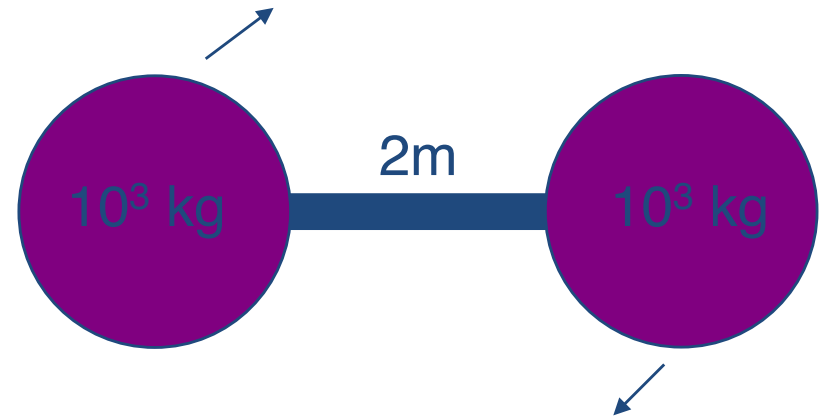
制御による干渉計の動作状態のキープ





重力波を作ってみよう

- 1トンの重りを2m離して1秒間に100回まわしてみよう
- 1メートル離れたところでどれくらいの大きさの重力波が出るだろうか？



$$h \approx \frac{4\pi^2 GMR^2 f_{orb}^2}{c^4 r}$$

$$M = 10^3 \text{ kg} \quad R = 1 \text{ m}$$

$$f = 100 \text{ Hz} \quad r = 1 \text{ m}$$

~10⁻³⁶ !!

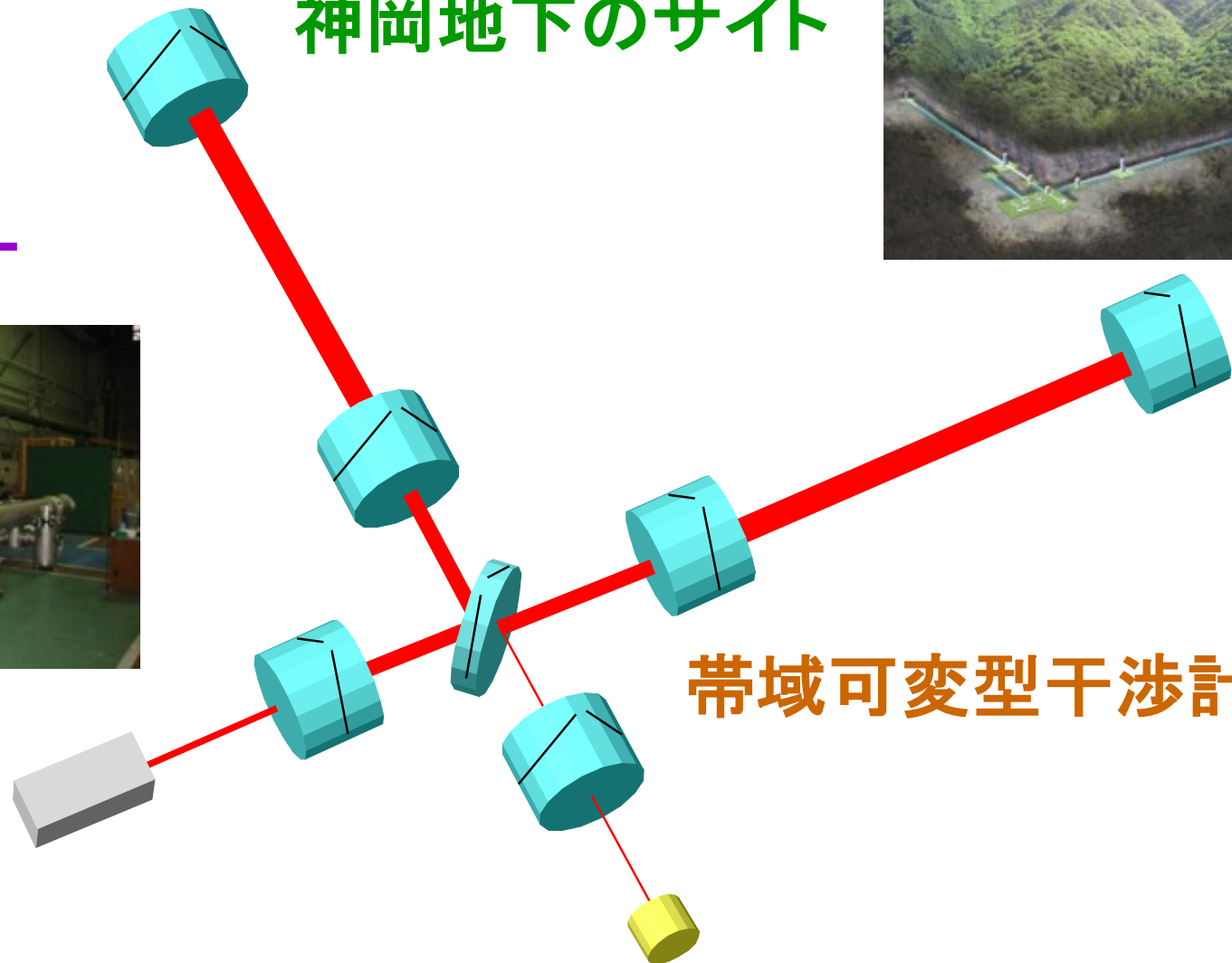
(「かぐら」の性能限界に比べて10兆分の1の大きさしか出ない)

•地球上でできる重力波では小さすぎる!!
 •ならば多少遠くても、とてつもなく重い星などの天体現象に頼らざるを得ない

神岡地下のサイト

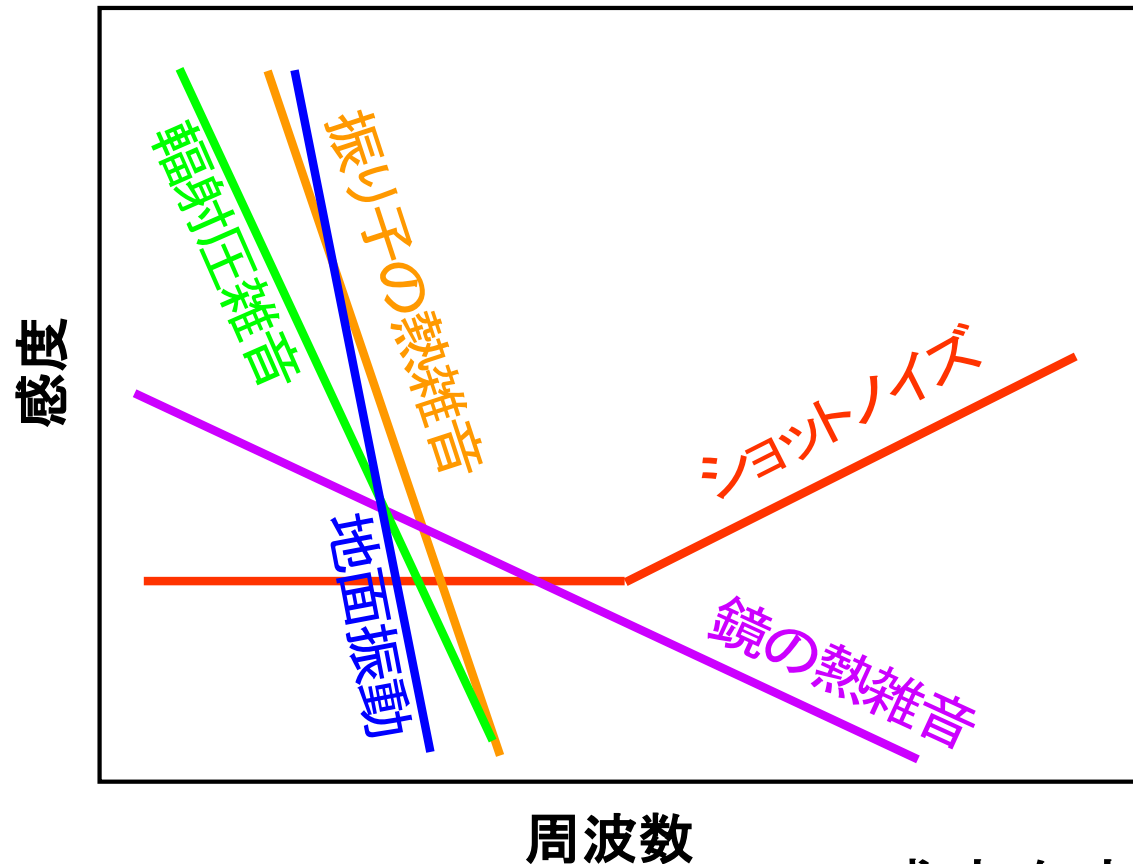


低温ミラー



帯域可変型干渉計

感度 = 雑音 / 干渉計の応答



感度を良くするには

1. 雑音を下げる
2. 干渉計の応答を高める

地面振動の影響低減

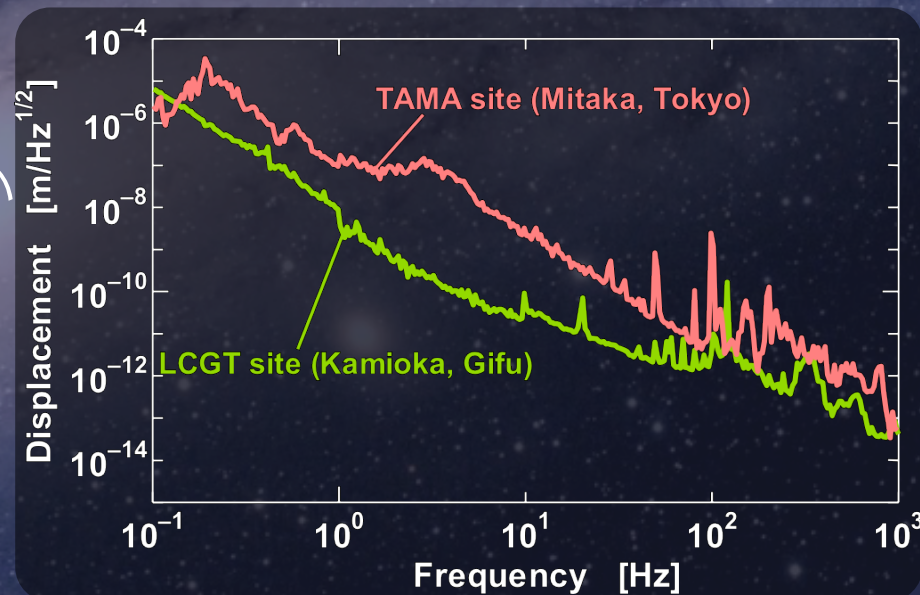
- 地面振動 --- 地上干渉計の低周波観測帯域と安定度を制限
 - 常微動 : 準定常的な変動. 干渉計の観測帯域を制限.
 - 非定常変動 : 地震, 気象変動, 人工的な励起など.
干渉計の安定度, 観測のデューティサイクルに影響.

地面振動レベル

- 地下サイトでは2-3桁小さい
- 高周波数で低減.

$$\delta x_{\text{seis}} \sim \frac{10^{-9}}{f^2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

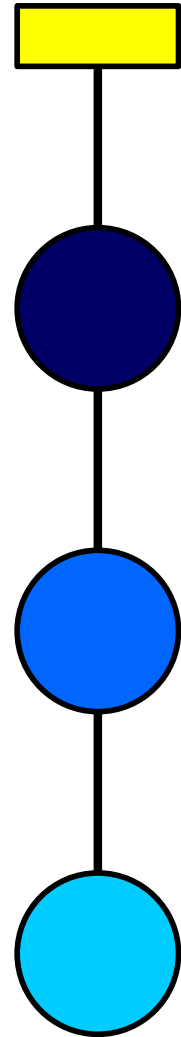
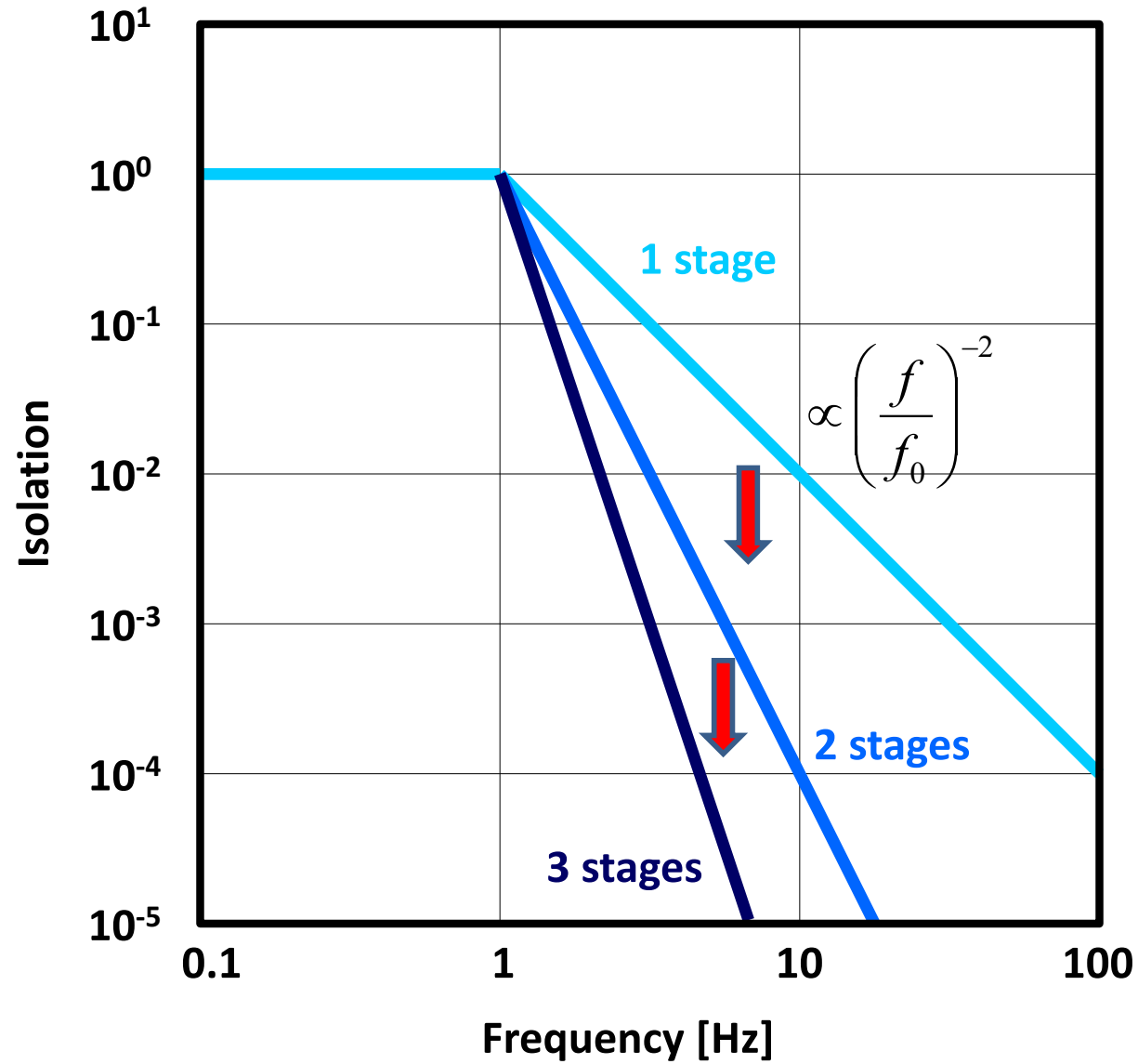
(神岡サイトでの値, f : 周波数,)

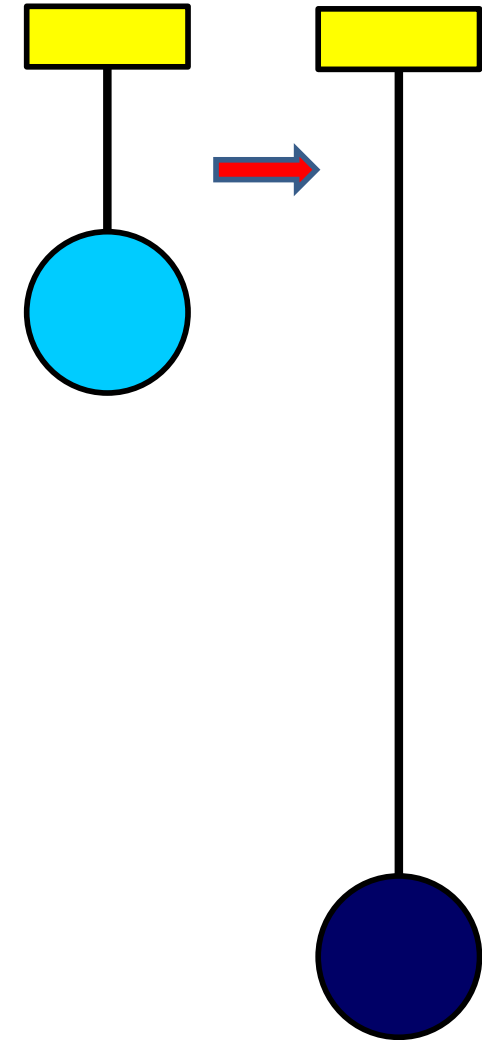
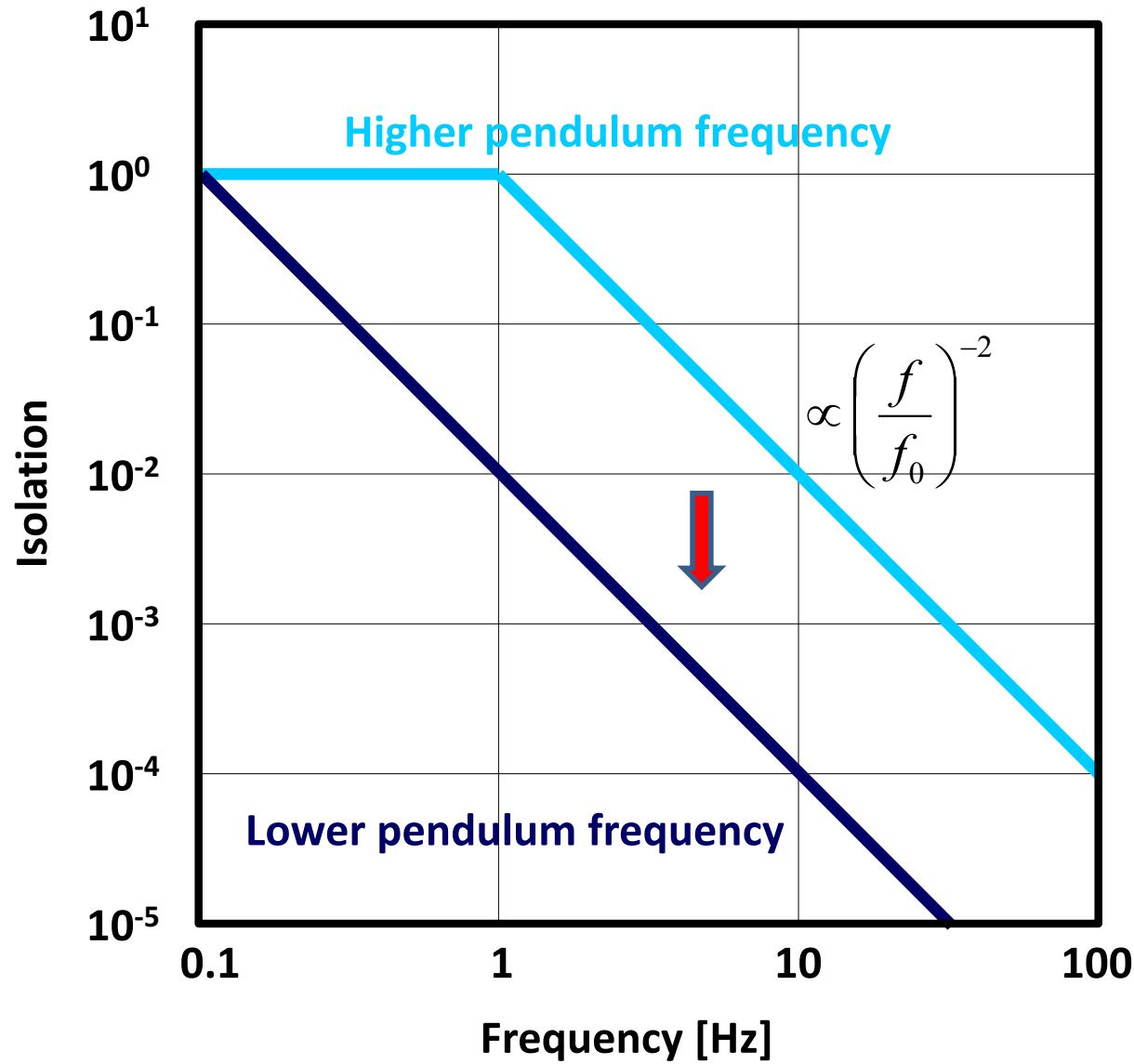


KAGRA : 地下サイトに建設 → 2-3桁小さい常微動, 長期安定な環境.

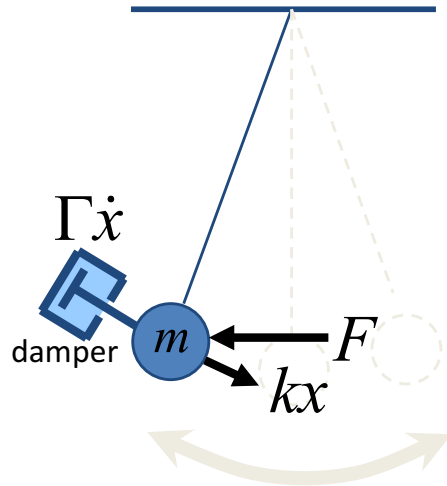
高性能防振装置 SAS : 多段・低周波の防振装置.

地面振動 ×





Pendulum in Physics



$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + kx$$

$x = Ae^{i\omega t}$: complex number

$|x| = A$: amplitude

$\text{Arg}(x) = \omega t = 2\pi ft$: angle

$$\frac{dx}{dt} = i\omega x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Laplace transform $\bar{f}(s) = L[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$$L[F] = m \times L\left[\frac{d^2 x}{dt^2}\right] + \Gamma \times L\left[\frac{dx}{dt}\right] + k \times L[x]$$

$$\bar{F} = ms^2 \bar{x} + \Gamma s \bar{x} + k \bar{x}$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}} = \frac{1}{ms^2 + \Gamma s + k} = \frac{1}{(s - (-\frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4mk}}{2m})) (s - (-\frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4mk}}{2m}))} ; 2 \text{ poles}$$

$$s \equiv i\omega$$

$$\bar{F} = -m\omega^2 \bar{x} + i\Gamma\omega \bar{x} + k \bar{x}$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\Gamma\omega + k}$$

Interpretation in Physics

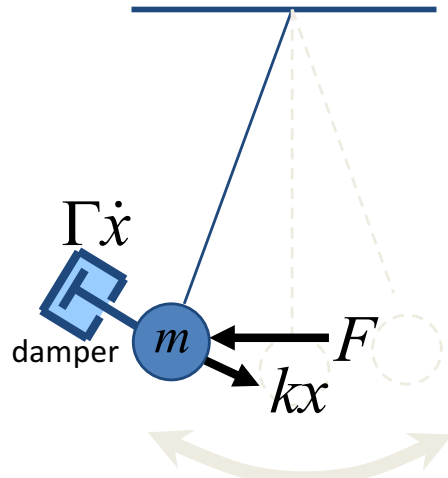
resonant angular frequency: $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{k/m}$

quality factor $Q \Rightarrow 1/\text{energy loss}$: $Q = m\omega_0 / \Gamma$

Transfer function from force to position :

$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

Bode plot : frequency vs. gain, phase



$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

if $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} \rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}$: constant

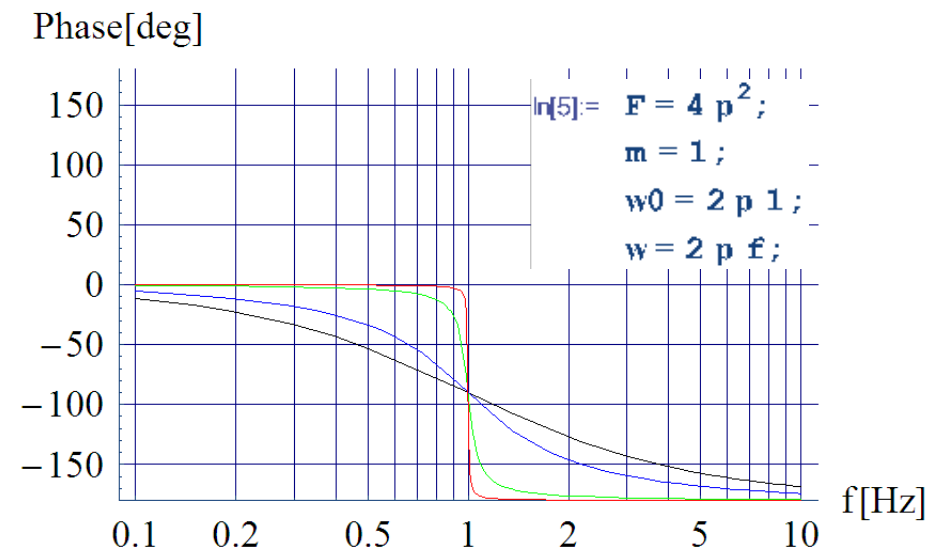
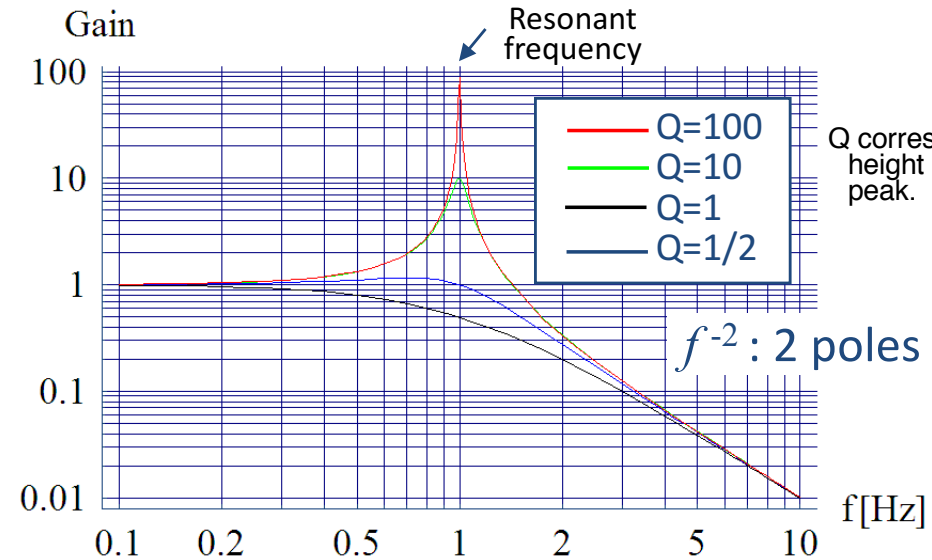
if $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} \rightarrow \frac{1}{-\omega^2}$: f^{-2} slope

if $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} \rightarrow \frac{Q}{i\omega_0^2}$: resonance

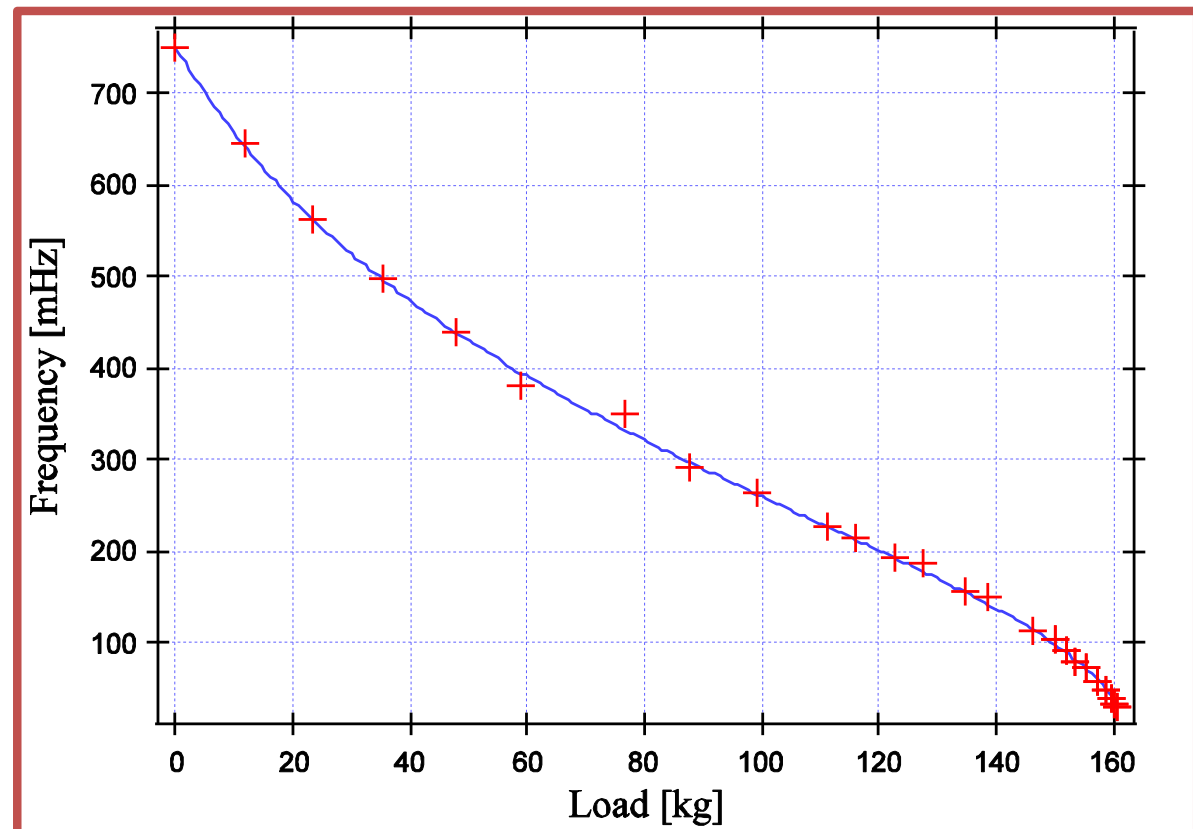
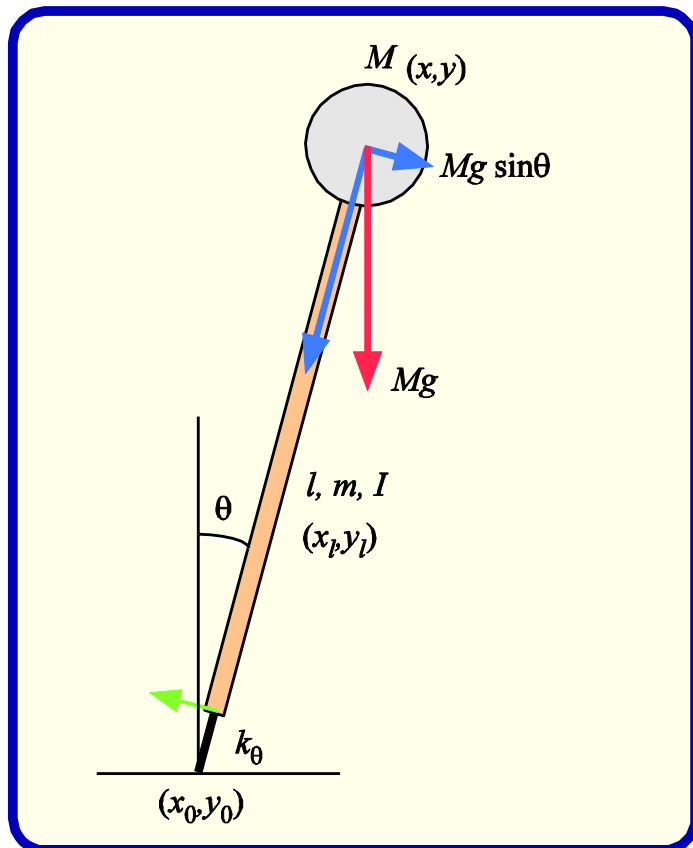
if $\omega = \omega_0, Q \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{F}/m} \rightarrow \infty$
: resonance, no damp

if $Q = 1/2 \Rightarrow$ critical damping

if $Q < 1/2 \Rightarrow$ over damping



復元力= 金属のバネ力+ 重力の反バネ力
⇒ 共振周波数の低減

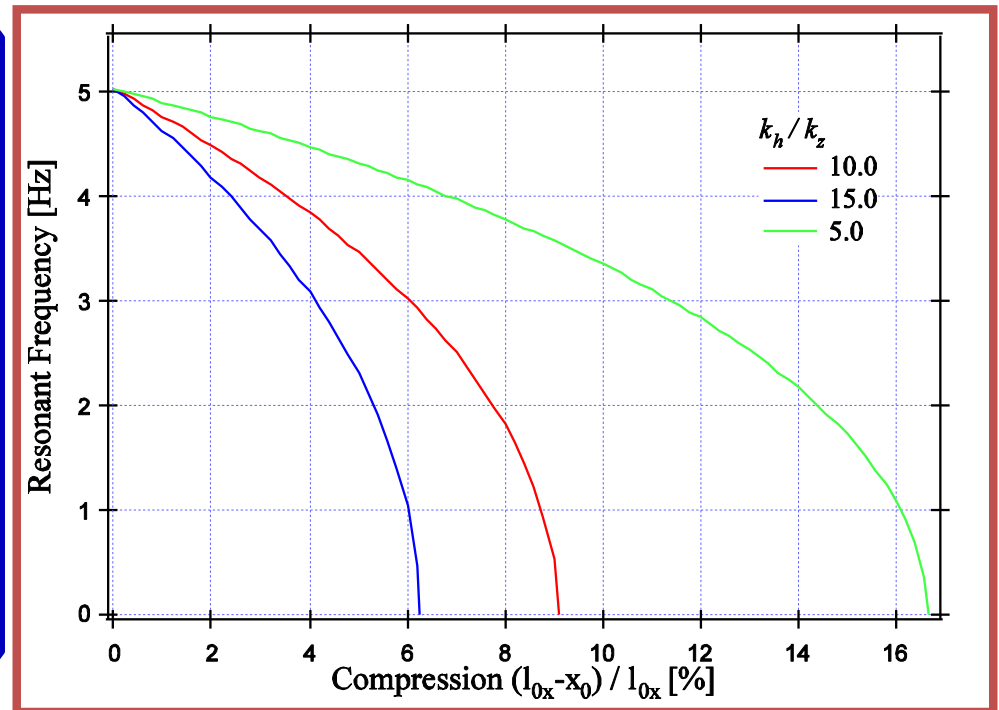
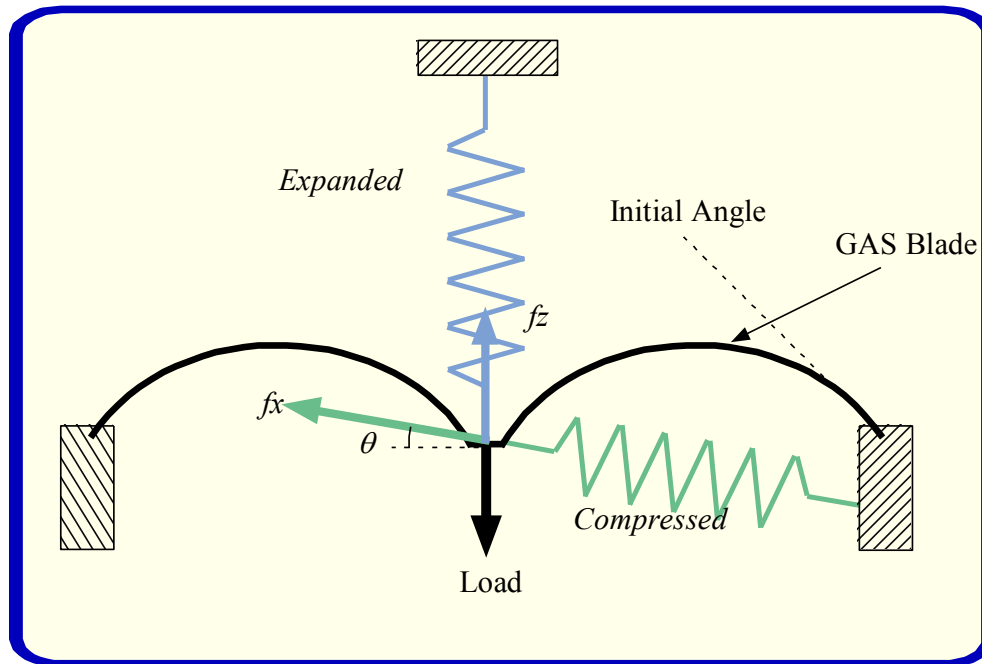


垂直方向の揺れがビーム方向の揺れにカップル

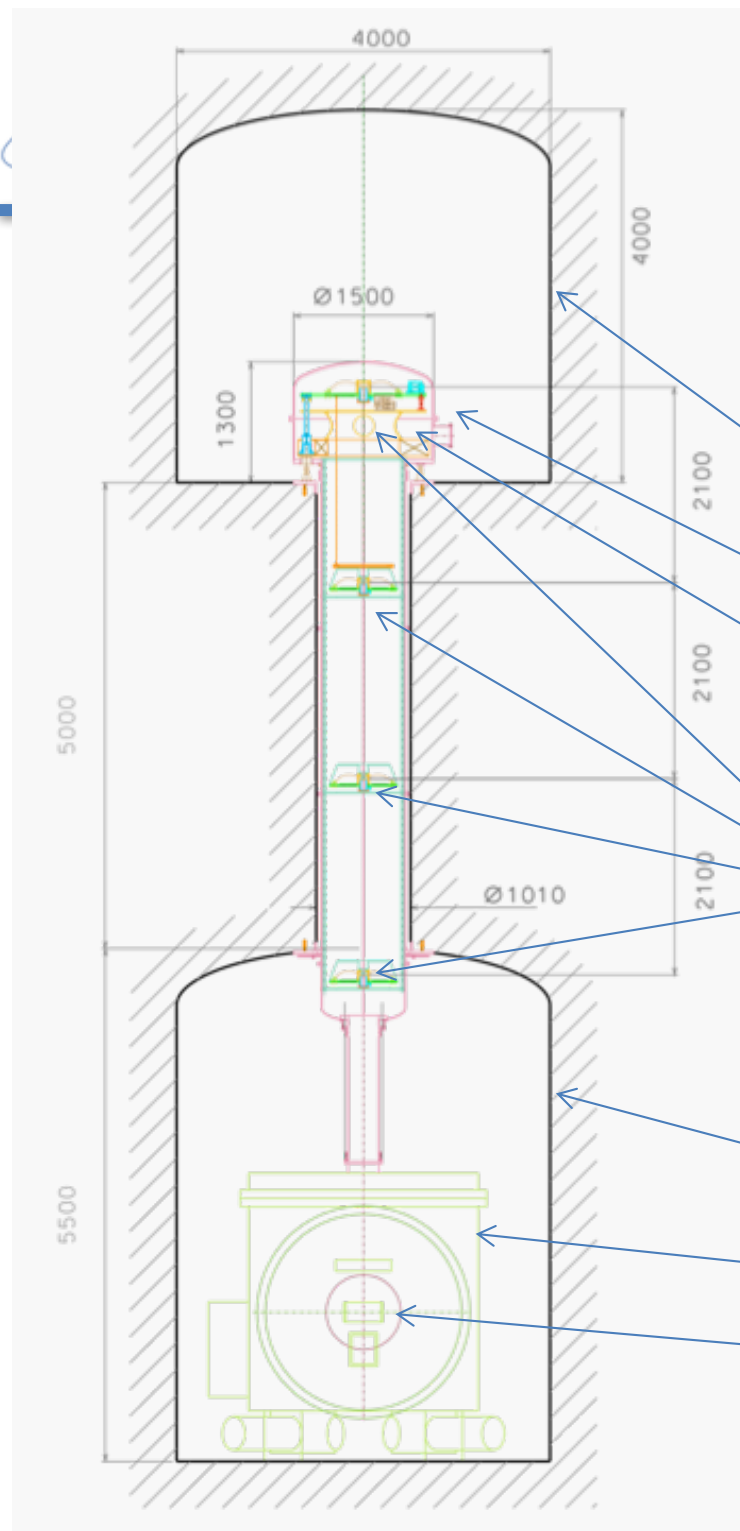
- 地球の曲率
- 機械系の非対称性
- トンネルの傾き（排水のため）

→ **垂直方向の防振も必要**

復元力= ブレードのバネ力+ 押し付けることにより生じる反バネ力
 → **共振周波数の低減**



防振システム



トンネル (2階)

チェンバー

倒立振り子

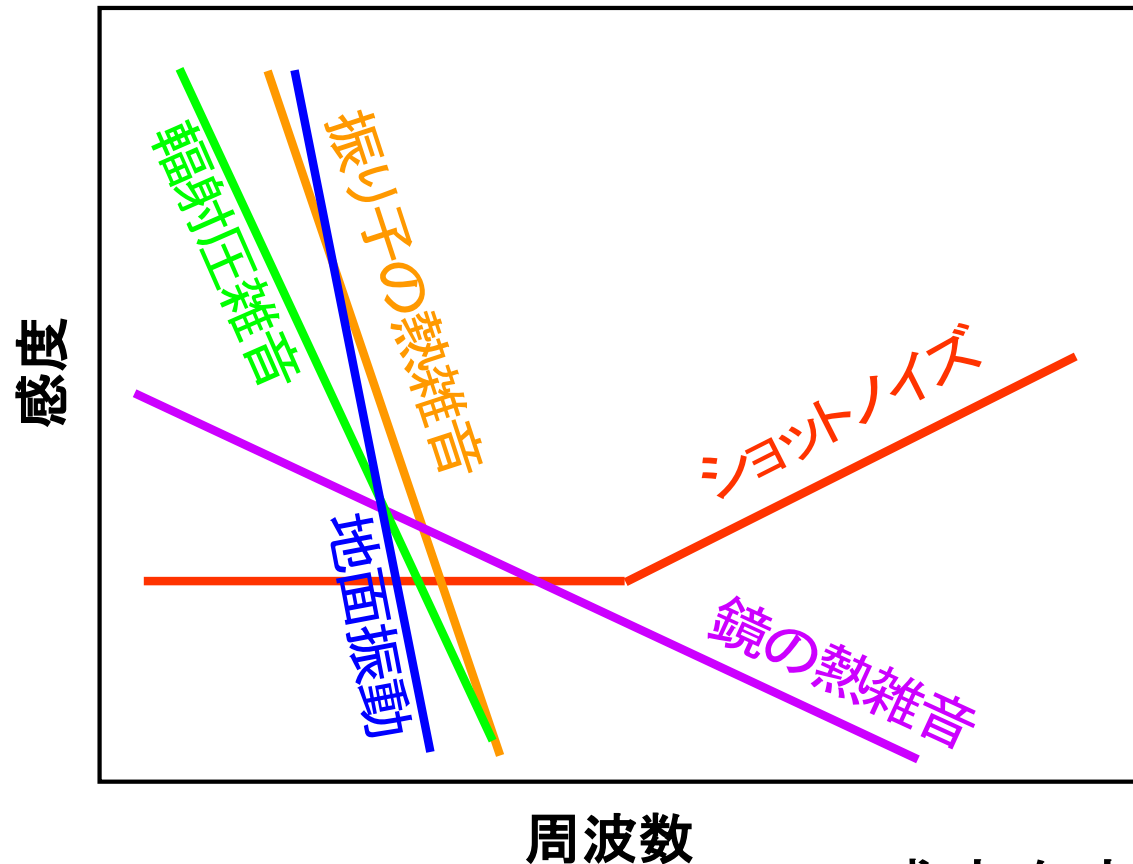
GAS フィルター

トンネル (1階)

チェンバー

鏡

感度 = 雑音 / 干渉計の応答



感度を良くするには

1. 雑音を下げる
2. 干渉計の応答を高める

熱雑音の低減

- ・ 熱雑音 --- 干渉計の原理的雑音
 - 干渉計の構成コンポーネントに 機械損失 → 揺動力 (揺動散逸定理)
 - 鏡の熱雑音 : 鏡基材, コーティング面などでの損失.
 - 振り子の熱雑音 : 鏡の懸架ワイヤ等での損失.

熱雑音

$$\text{Thermal noise} \propto \sqrt{\frac{T}{Q}}$$

T : 温度 [K]
 Q : 機械損失の逆数

温度を下げる
良い材質を選ぶ
低減する干渉計構成

KAGRA : 低温干渉計 → 熱雑音を低減するクリアな方法.

- 鏡 ~20K, 振り子 ~16K
- 付加的な効果 : 機械損失の低減, 熱レンズ効果の低減, パラメトリック不安定性の低減.

