2015　解析学 敗者復活戦問題 2015/10/01

[**1**] $\cos^{-1}\left(-\dfrac{11}{14}\right) - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$ を求めよ。

[**2**] $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^{\sqrt{3+4x^2}}$ を求めよ。

[**3**] $a < b$ を定数とする。このとき，$\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,dx$ を置換積分することにより，変数 t の有理関数（分子および分母が整式であるような分数式。できるかぎり約分し，分母は因数分解せよ。）の定積分として表せ。なお，積分値を計算する必要はない。

[**4**] $f(x) = \dfrac{x^4+2x^3+x^2+61x+43}{(x+2)^2(x^2-4x+13)}$ とする。

(a) $f(x)$ を部分分数分解せよ。

(b) 各 “部分品” をそれぞれ積分することにより，$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ を求めよ。

[略解]

[**1**] $\dfrac{\pi}{3}$

[**2**] $e^{-\frac{4}{\pi}}$

[**3**] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2(a+bt^2)}{(1+t^2)^2}\,dt$

[**4**] (a) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{(x+2)^2} + \dfrac{x+1}{x^2-4x+13}$

(b) $\dfrac{3}{2}\log 2 + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{4}$