2017　解析学　特別試験 2017/12/25

[1] $f(x,y)=\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)^{(\cos^{-1}xy)}$ とするとき，$f_y(x,y)$ を求めよ。

[2] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3\cos x}\,dx$ を求めよ。

[3] $f(x)=\dfrac{x^3+3x+11}{(x-1)^2(x^2+4)}$ とする。

(a) $f(x)$ を部分分数分解せよ。

(b) 各 “部分品” をそれぞれ積分することにより，$\displaystyle\int_{-2}^{0}f(x)\,dx$ を求めよ。

[4] 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2x}{1-x^2}y=\dfrac{6x}{1+x}$ の解 $y=y(x)$ で，$y(0)=1$ を満たすものを，定数変化法を用いて求めよ。ただし，$-1<x<1$ とする。

［**略解**］

[1] $-\left\{\dfrac{x\cos^{-1}(xy)}{\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)(\frac{x^2}{y^2}+1)y^2}+\dfrac{x\log(\tan^{-1}\frac{x}{y})}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right\}\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{y}\right)^{\cos^{-1}(xy)}$

[2] $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}\log(\sqrt{2}-1)$

[3] (a) $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{x-1}{x^2+4}$

(b) $2-\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{\pi}{8}$

[4] $y=\dfrac{-2x^3+3x^2+1}{1-x^2}$