

Basic 問題

[1] 次の2つの値の関係をそれぞれ求めよ。ただし微分を利用してはいけない。

(a) $\arcsin x$ と $\arccos x$

(b) $\arctan x$ と $\arctan \frac{1}{x}$ (ただし $x < 0$ とする。)

[2] $h(x)$ を連続な関数とし, $f(x, y) = \int_{\frac{x}{y^2}}^{x^2 y} h(\arccos x) dx$ とする。このとき, 全微分 df を求めよ。

[3] $\int_0^1 x (\arctan x)^2 dx$ を求めよ。

[4] $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}$ を求めよ。

[5] $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 9x + 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)^2}$ とする。

(a) $f(x)$ を部分分数分解せよ。

(b) 各“部分品”をそれぞれ積分することにより, $\int_{-2}^0 f(x) dx$ を求めよ。

Advanced 問題

[1] $f(x) = \arcsin x$ とする。 $f(x)$ は $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ を満たすことを示し, それを用いて,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ。

[2] $f(x, y) = (y - 2x^2 + 2x - 1)(y - x^2)$ の極値を求めよ。

[3] $\Omega = \{(x, y) \mid y \geq x \text{ かつ } y \geq -2x\}$ とするとき, $\iint_{\Omega} \exp(-\sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}) dx dy$ を求めよ。

[4] 微分方程式 $y' + xy = x\sqrt{y}$ の解 $y = y(x)$ で, $y(0) = 4$ を満たすものを求めよ。