

学籍番号 _____ 氏名 _____

2010 自然現象のモデル化とその解析・中間試験

2010/12/15

[1] 次の微分方程式の解 $x = x(t)$ を，ラプラス変換を用いて求めよ。

$$x'' + 4x' + 13x = 10 \exp(-t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4$$

[2] 次の偏微分方程式の解 $u = u(x, t)$ を, ラプラス変換を用いて求めよ。

$$u_x + 2u_t = 24tx, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = -t^3$$

ラプラス変換公式集

基本的変換 ($\mathcal{L}(f)$ は f のラプラス変換を表わす。)

- $(\mathcal{L}(t^n))(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots,)$
- $(\mathcal{L}(e^{\lambda t}))(s) = \frac{1}{s - \lambda}$
- $(\mathcal{L}(\cos \lambda t))(s) = \frac{s}{s^2 + \lambda^2}$
- $(\mathcal{L}(\sin \lambda t))(s) = \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$

基本公式 ($f(t), g(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s), G(s)$ とする。)

- $(\mathcal{L}((\lambda f + \mu g)(t)))(s) = \lambda F(s) + \mu G(s) \quad (\lambda, \mu \text{ は定数})$
- $(\mathcal{L}(f(\lambda t)))(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(f(t - \lambda)))(s) = e^{-\lambda s} F(s) \quad (\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(f(t + \lambda)))(s) = e^{\lambda s} \left\{ F(s) - \int_0^\lambda e^{-st} f(t) dt \right\} \quad (\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(e^{\mu t} f(t)))(s) = F(s - \mu)$
- $(\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right))(s) = \frac{1}{s} F(s)$
- $(\mathcal{L}(f'(t)))(s) = sF(s) - f(+0)$
- $(\mathcal{L}(-tf(t)))(s) = \frac{dF}{ds}(s)$
- $(\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right))(s) = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
- $(\mathcal{L}((f * g)(t)))(s) = F(s) G(s)$

この「公式集」の頁は切り離して「計算用紙」として使用してもよいが、答案提出時に、答案に挟み込んで提出すること。(持ち帰り不可)