学籍番号 ________________________　氏名 ____________________

2011 自然現象のモデル化とその解析・中間試験

2011/12/12

[1] 次の微分方程式の解 $x = x(t)$ を，ラプラス変換を用いて求めよ。

$$x'' + 2x' + 5x = 3\exp(-t)\sin t,\quad x(0) = 2,\quad x'(0) = -1$$

[2] 次の偏微分方程式の解 $u = u(x,t)$ を，ラプラス変換を用いて求めよ。

$$u_t = 4u_{xx}, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \exp(-4t), \quad u(x,0) = \sin x$$

ラプラス変換公式集

基本的変換 （$\mathcal{L}(f)$ は f のラプラス変換を表わす。）

- $(\mathcal{L}(t^n))(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots,)$
- $(\mathcal{L}(e^{\lambda t}))(s) = \dfrac{1}{s - \lambda}$
- $(\mathcal{L}(\cos \lambda t))(s) = \dfrac{s}{s^2 + \lambda^2}$
- $(\mathcal{L}(\sin \lambda t))(s) = \dfrac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$

基本公式 （$f(t), g(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $F(s), G(s)$ とする。）

- $(\mathcal{L}((\lambda f + \mu g)(t))(s) = \lambda F(s) + \mu G(s)$ （ λ, μ は定数 ）
- $(\mathcal{L}(f(\lambda t)))(s) = \dfrac{1}{\lambda} F(\dfrac{s}{\lambda})$ $\quad(\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(f(t - \lambda)))(s) = e^{-\lambda s} F(s)$ $\quad(\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(f(t + \lambda)))(s) = e^{\lambda s} \left\{ F(s) - \displaystyle\int_0^{\lambda} e^{-st} f(t)\, dt \right\}$ $\quad(\lambda > 0)$
- $(\mathcal{L}(e^{\mu t} f(t)))(s) = F(s - \mu)$
- $(\mathcal{L}(\displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau))(s) = \dfrac{1}{s} F(s)$
- $(\mathcal{L}(f'(t)))(s) = sF(s) - f(+0)$
- $(\mathcal{L}(-tf(t)))(s) = \dfrac{dF}{ds}(s)$
- $(\mathcal{L}(\dfrac{f(t)}{t}))(s) = \displaystyle\int_s^{\infty} F(\sigma)\, d\sigma$
- $(\mathcal{L}((f * g)(t)))(s) = F(s)\, G(s)$

この「公式集」の頁は「計算用紙」として使用してもよいが，答案提出時に，答案に挟み込んで提出すること。（持ち帰り不可）