略解がある問題については，自己採点して提出して下さい。

問 1

略解 (1)

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ikr}}{r} = (ikr-1)\frac{e^{ikr}}{r^2}\frac{R-z}{r} \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}Ae^{ikz} = -ikAe^{ikz} \tag{5}$$

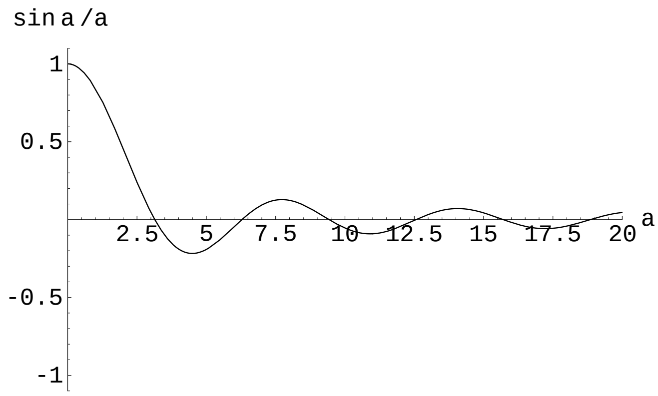
(2)

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_S e^{ikz+ikr}\left(\frac{ikr-1}{r^2}\frac{R-z}{r} + \frac{ik}{r}\right)dS \tag{6}$$

$kr \gg 1,\ z \to 0,\ r \sim R$ に注意する.

問 2

略解 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ より, $x=0$ では与式 $=1$ であり, 0 点が $x = \pi m\ (m = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ にある。また, $x \to -x$ の置き換えで不変な偶関数である。



(2) 分母の $\sin x$ が 0 となる $x = \pi m\ \ (m = 0,\ ,\pm 1,\ \pm 2, \cdots)$ での性質を調べよう。

(i) n が奇数の場合。 $\cos \pi m$ と $\cos \pi mn$ の符号は等しいから, ロピタルの定理より

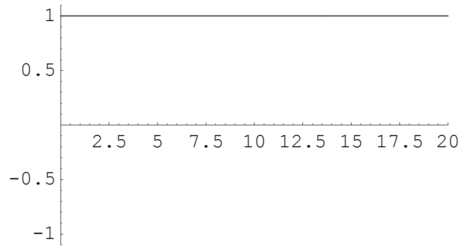
$$\lim_{x\to\pi n}\frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x\to\pi n}\frac{n\cos nx}{\cos x} = n.$$

(ii) n が偶数の場合。 $\cos \pi m$ は m の偶奇によりそれぞれ $+1,\ -1$ であるのに対して, $\cos \pi mn$ は常に $+1$ である。したがって, ロピタルの定理より,

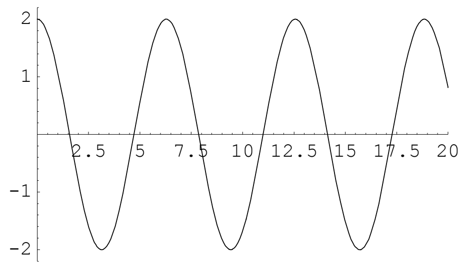
$$\lim_{x\to\pi n}\frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x\to\pi n}\frac{n\cos nx}{\cos x} = \begin{cases} +n & (m\text{: 偶数}) \\ -n & (m\text{: 奇数}) \end{cases}$$

また, 0 点は $x = \pi\frac{m}{n}$(m : 整数, ただし, 0, n の正負倍数を除く) である。

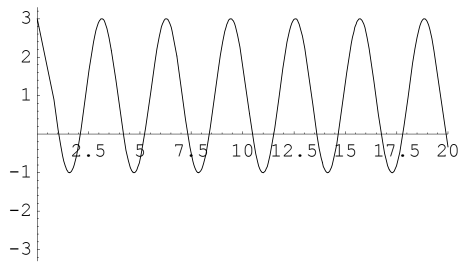
n = 1


1
0.5
2.5 5 7.5 10 12.5 15 17.5 20
-0.5
-1

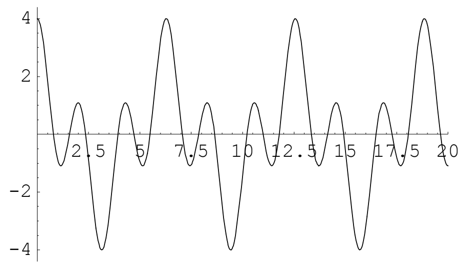
n = 2


2
1
2.5 5 7.5 10 12.5 15 17.5 20
-1
-2

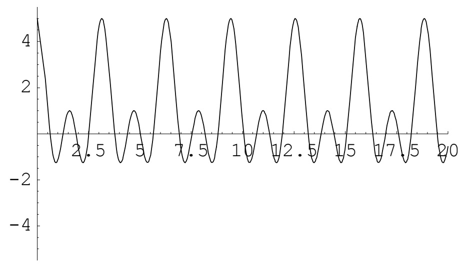
n = 3


3
2
1
2.5 5 7.5 10 12.5 15 17.5 20
-1
-2
-3

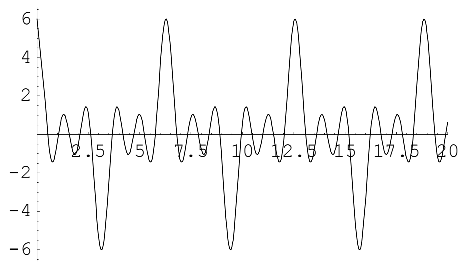
n = 4


4
2
2.5 5 7.5 10 12.5 15 17.5 20
-2
-4

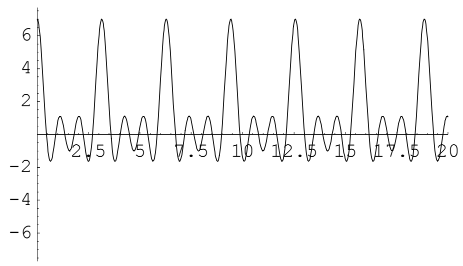
n = 5


4
2
2.5 5 7.5 10 12.5 15 17.5 20
-2
-4

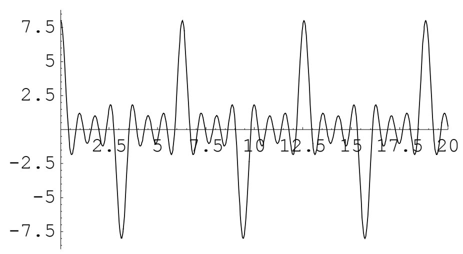
n = 6



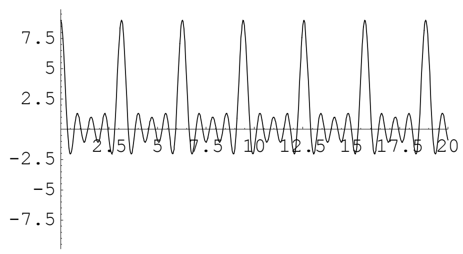
n = 7



n = 8



n = 9



n = 10