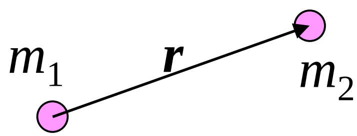
万有引力

2が受ける力

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

万有引力による位置エネルギー

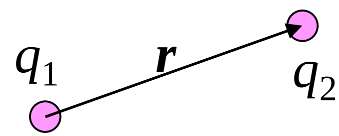


$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

クーロン力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

クーロン力による位置エネルギー



$$\boxed{U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}}$$

クーロン・ポテンシャル（クーロン・エネルギー）
（電気力による位置エネルギー）

どちらも $r=\infty$（2つの質点, 点電荷が無限に遠く離れた時）が基準点（$U=0$）

重力は常に引力
位置エネルギーは負

電気力は引力／反発力
位置エネルギーは負／正

電荷が異符合／同符号

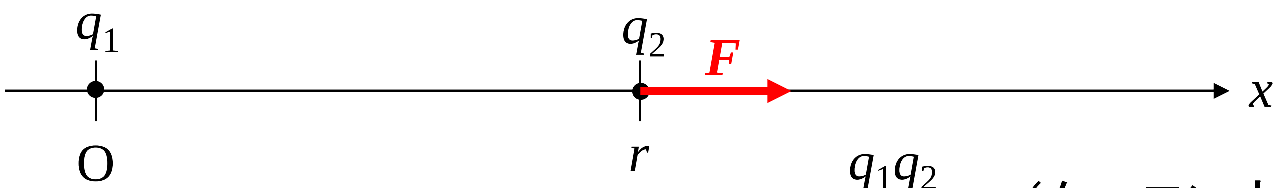
位置エネルギー

位置 $\boldsymbol{r}$ における保存力による位置エネルギーとは、
$\boldsymbol{r}$ から基準点 $\boldsymbol{r}_0$（位置エネルギーが 0 の点）に移動するときに
保存力がする仕事のことである。

$$U(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F}_{保}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

エネルギー：仕事をする能力
（基準点に戻る時に保存力は $U(\boldsymbol{r})$ の仕事をすることができる。）

問題：下の図のように電荷 q_1 が原点 O に固定されており、電荷 q_2 が $x = r$ にある。①
この状態から電荷 q_2 が無限遠（$x = +\infty$）まで移動するとき、
クーロン力が電荷 q_2 にする仕事 W を求めよ。



$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$ （クーロン力）

$$W = \int_r^\infty F(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_r^\infty \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$1/x^2$ の原始関数

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{x}\right]_r^\infty$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ 0 - \left(\frac{-1}{r}\right)\right\}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = U(r)$$

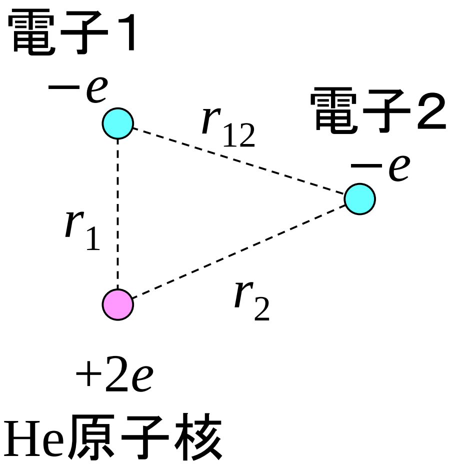
先ほどは、万有引力との対応から導いたが、
位置エネルギーの定義より導いた。
前回スライド㉒参照

$$U(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F}_{保}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

3つ以上の電荷が存在する時のクーロン・ポテンシャル

電気力 $\boldsymbol{F}$ は重ね合わせの原理に従う → クーロン・ポテンシャルにも適用できる。
（電気力による位置エネルギー）

例5：ヘリウム原子（p206）
原子核と電子が左の図のような位置関係にあるときの全体のクーロン・ポテンシャルを求めよ。



$$\frac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \quad \frac{(-e)(+2e)}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \quad \frac{(-e)(+2e)}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

同符号の電荷同士の位置エネルギーは正
異符号の電荷同士の位置エネルギーは負
位置エネルギーの基準点は無限に離れた点

②の例5の問題で、$r_1 = r_2 = r_{12} = r = 10^{-10}$ m（原子の大きさ）のとき位置エネルギーを数値で答えよ。 ③

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,(1-2-2)$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 9\times10^9\,\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{10^{-10}} = 1.4\times10^{-18}$$

$$U = -3\times\ 1.4\times10^{-18} = -4.2\times10^{-18}$$

-4.2×10^{-18} J

原子１個分のエネルギーはたいへん小さい

例：水素原子のイオン化エネルギーは、2.2×10^{-18} J

電子や陽子等の電荷の絶対値が素電荷の粒子が、原子の大きさ程度（10^{-10} m） ④

離れているときの位置エネルギーの絶対値は、$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 1.4\times10^{-18}$ J である。

問題：上記のエネルギー、1モル分のエネルギーを求めよ。

$$1.4\times10^{-18}\times6\times10^{23} = 8.4\times10^{5}\ \mathrm{J} = 840\ \mathrm{kJ}$$

結合エネルギー

H−H: 436kJ/mol
C−H: 413kJ/mol
C−C: 494kJ/mol
O−H: 461kJ/mol

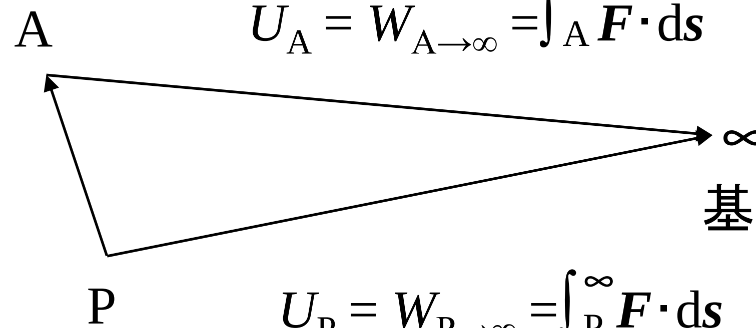
左の化学結合（共有結合）は、
上記のような単純なものではないが
概ね同程度の値になっている。

注）分子によって多少値は変わる。

基準点以外の
任意の2地点を電荷Qが移動する場合に電気力が行う仕事と位置エネルギー

保存力はどんな経路を通っても同じ

$$U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}\to\infty} = \int_{\mathrm{A}}^{\infty} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$



$$U_{\mathrm{P}} = W_{\mathrm{P}\to\infty} = \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\infty}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{\mathrm{A}}^{\infty} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{A}}$$

位置エネルギー$U(\boldsymbol{r})$は、
電荷 Q が点 $\boldsymbol{r}$ から基準点(∞)に移動
するときに電気力 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事

保存力の行う仕事は、
位置エネルギーの減少分に等しい。
位置エネルギーの減少分だけ、
保存力は仕事ができる。
電気力に限らず、
すべての保存力について成り立つ

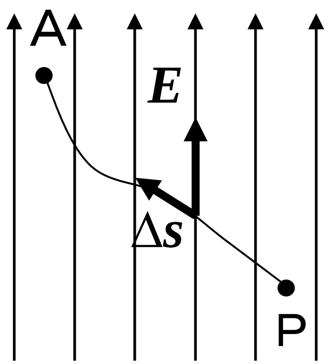
エネルギーは、仕事をする能力なので
仕事をした分、エネルギーは減少する。

$$W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{A}}$$

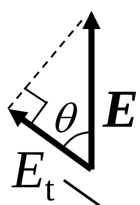
（保存力の行う仕事は、位置エネルギーの減少分に等しい。）

電気力に限らず、すべての保存力で成り立つ

上の式と電場 $\boldsymbol{E}$ との関係を考えてみる



電荷 Q が
一様電場中を
PからAまで
移動することを
考える



$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = E\ \mathrm{d}s\cos\theta = E\cos\theta\,\mathrm{d}s = E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$

$$W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} QE_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = U_{\mathrm{P}} - U_{\mathrm{A}}$$

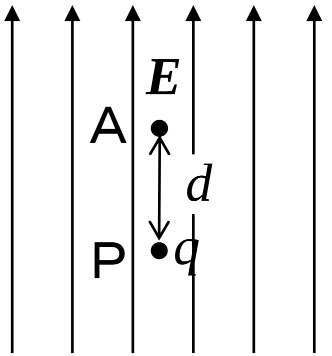
電場 $\boldsymbol{E}$ の経路の接線方向成分

$$E_{\mathrm{t}} = E\cos\theta$$

t: tangent（接線）

図のように一様な電場 $\boldsymbol{E}$ 中を正の点電荷 q（$q>0$）が点Pから点Aまで移動する ⑦

①正電荷 q に作用する電気力の大きさと向きを答えよ。



答：大きさ　qE　，向き：　上向き（電場の向き）

② 正電荷 q が点Pから点Aまで移動するとき、正電荷に作用する電気力がする仕事 $W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}$ はいくらか。

答：　qEd

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}=qEd$$

③ 点Pにおける正電荷 q の位置エネルギー U_{P} と点Aにおける位置エネルギー U_{A} では、どちらが大きいか？

仕事がよりできるのはどちらか？エネルギー：仕事をする能力

答：　U_{P}

② どれだけ大きいか？

$$W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}QE_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s=U_{\mathrm{P}}-U_{\mathrm{A}}$$

答：　qEd

電位

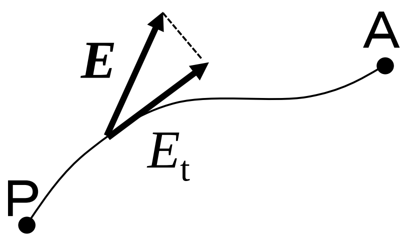
$\boxed{\text{電位}}$:単位正電荷(1C)あたりの電気力による位置エネルギー

$$\text{電位}\ V=\frac{U}{Q}$$

単位はボルト[V , J/C]　　$U=QV$

$$W_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}Q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}QE_t ds=U_{\mathrm{P}}-U_{\mathrm{A}}=Q(V_{\mathrm{P}}-V_{\mathrm{A}})$$

をQで割ると



$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}}E_t\, ds=V_{\mathrm{P}}-V_{\mathrm{A}}$$

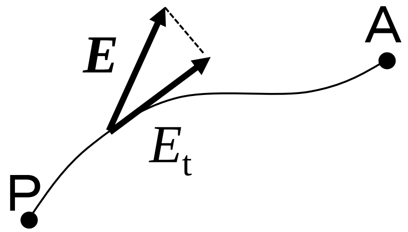
点Pと点Aの $\boxed{\text{電位差}}$

E_tを経路に沿って積分したもの

$V_{\mathrm{P}}>V_{\mathrm{A}}$ なら、点Pは点Aより電位が $\boxed{\text{高い}}$ といい、

$V_{\mathrm{P}}<V_{\mathrm{A}}$ なら、点Pは点Aより電位が $\boxed{\text{低い}}$ という。

電位差でなく電位は？



$$\int_P^A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_P^A E_t\, ds = V_P - V_A$$

上の図の点Aを基準点とし、その位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$ とする。（$V_A = V(\boldsymbol{r}_0) = 0$ ）
点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると（$V_P = V(\boldsymbol{r})$ ）

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} E_t\, ds = V(\boldsymbol{r})}$$

（復習） $\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = U(\boldsymbol{r})$

基準点に戻るときに保存力 $\boldsymbol{F}$ がする仕事が位置エネルギー

電気力の場合、$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ なので

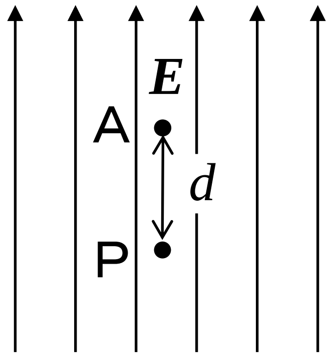
$$\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = U(\boldsymbol{r})$$

qで両辺を割ると

$$\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{U(\boldsymbol{r})}{q} = V(\boldsymbol{r})$$

図のように一様な電場 $\boldsymbol{E}$ 中に点Pと点Aがある。 ⑩

① 点Pの電位 V_{P} と点Aの電位 V_{A} では、どちらが高いか？



答: V_{P}

② どれだけ高いか？

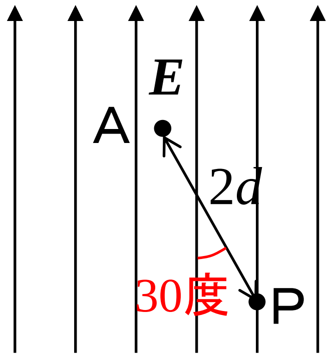
$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{ds} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{A}} E_t \, \mathrm{d}s = V_{\mathrm{P}} - V_{\mathrm{A}}$$

答: Ed

③ 点Aを基準点とする($V_{\mathrm{A}} = 0$)と、点Pの電位はいくら？

答: Ed

③ 右図の場合、点Aを基準点とすると、点Pの電位はいくら？



答: $\sqrt{3}Ed$

$$\boldsymbol{E} \cdot \Delta\mathbf{s} = E2d\cos 30^{\circ}$$

電場の単位

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$　　　電位差 $\Delta V = Ed$

[N] = [C][N/C]　　　[V] = [V/m][m]

電場の単位は、N/C でもよいし、V/m でもよい。

その時、どちらの方が分かりやすいかで選べばよい。

電気力を議論しているときは N/C がよいし、

電位を議論しているときは V/m がよい。

逆を使っても間違いではないし、試験の際の減点もない。

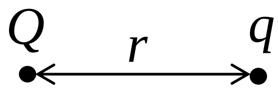
組立単位では $\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}}$

電磁気学のすべての単位は m, kg, s, A の組み合わせで表現できる

MKSA単位系（p7，19章参照）

点電荷による電位

（復習）点電荷 Q から距離 r の位置に点電荷 q がある。
このときのクーロン・ポテンシャル（電気力による位置エネルギー）は



$$U(r) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

点電荷 q がある場所の電位：$V(r) = \dfrac{U(r)}{q}$ なので

点電荷Qから距離 r の場所の電位： $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

万有引力との対応

単位質量（1kg）あたりの
位置エネルギー
（特に定義されてない）

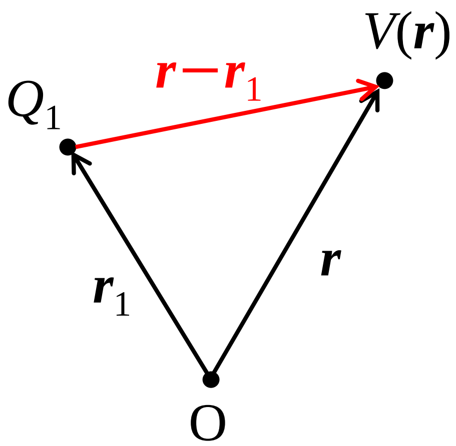
問題：電荷 Q から無限に離れた点の電位はいくらか？

$$\lim_{r \to +\infty} V(r) = 0$$

無限に離れた点が基準点。
基準点の電位は 0

問題：点 $\boldsymbol{r}_1$ に電荷 Q_1 がある場合の点 $\boldsymbol{r}$ の電位 $V(\boldsymbol{r})$ はいくらか。⑬

（表現の問題です）



$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

電位は
スカラー

複数の電荷 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ による電位

電場は各電荷がつくる電場の和（重ね合わせの原理）

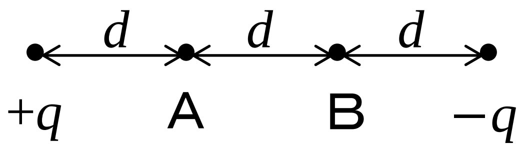
↓

電位は各電荷がつくる電位の和

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$

問題：下の図のような場合、A, Bの電位差 $V_A - V_B$ を求めよ。

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$



$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|$: i 番目の
電荷 Q_i との距離

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (2d)} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2d)} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

電位は、基準点（ $V = 0$ の点）がどこかで値が違う。（普通は無限遠）
電位差は、どこが基準点であってもその値に違いはない。

問題：電場は電位の勾配（にマイナスをつけたもの）である。
電位を r で微分して確かめてみよ。

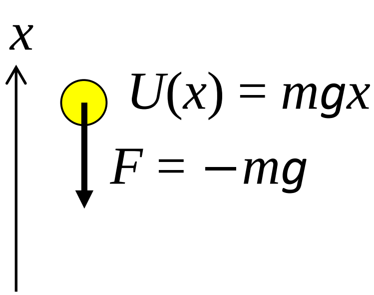
$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$$

$$-\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E(r)$$

類似：力（保存力）Fは位置エネルギーUの勾配（にマイナスをつけたもの）である。

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

例：重力（保存力）と重力による位置エネルギー



問題：位置エネルギー$U(x)$を x で微分して確かめてみよ。

$$-\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mgx) = -mg = F$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

電場と電位　⇔　保存力と位置エネルギー

$E(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$ の両辺に電荷 q をかけると、$qE(r) = -\dfrac{\mathrm{d}qV(r)}{\mathrm{d}r}$

これは、電気力 $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}$ にほかならない。

また、保存力$\boldsymbol{F}$と位置エネルギーUの関係を積分形で表現すると

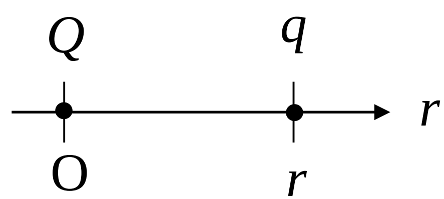
$$\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = U(\boldsymbol{r})$$

位置 $\boldsymbol{r}$ から基準点 $\boldsymbol{r}_0$ に行くまでに保存力がする仕事が位置エネルギー$U(\boldsymbol{r})$

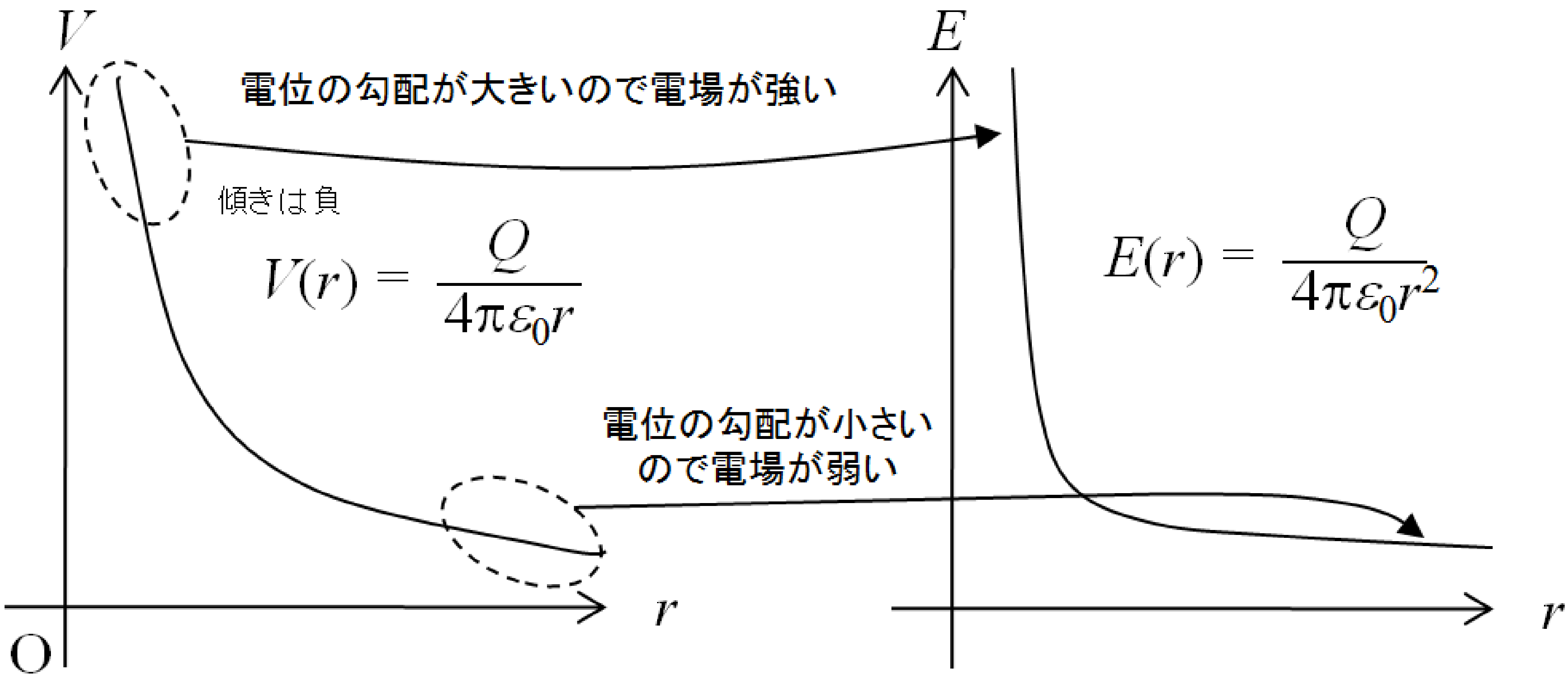
電場$\boldsymbol{E}$と電位Vの関係を積分形で表現すると

$$\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = V(\boldsymbol{r})$$

点電荷の周囲の電位と電場



$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$$



$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

等電位面

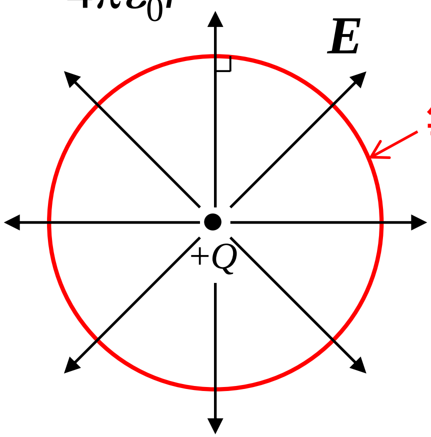
電位の等しい点を連ねたときにできる面

等電位線

等電位面上の任意の曲線

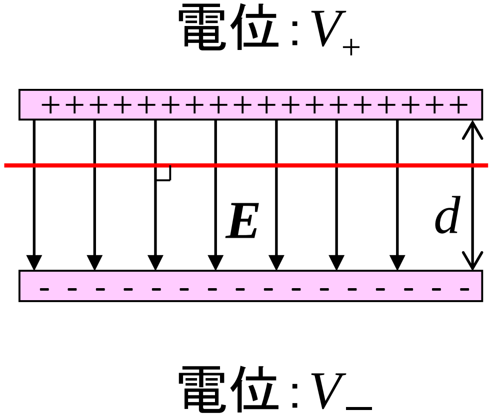
例1：点電荷の作る電場

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



点電荷を中心とする球面
（等電位面は電場と直交）

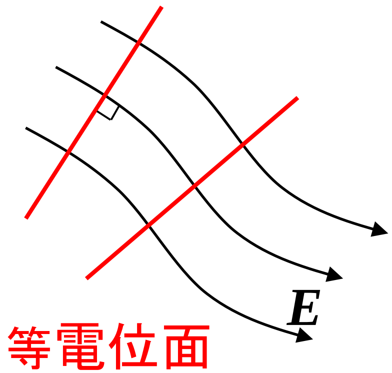
例2：平行板のつくる電場



平行板と平行な平面
（等電位面は電場と直交）

電位差 $V_+ - V_- = \boxed{Ed}$

例3：一般の電場
（複雑な電荷分布）



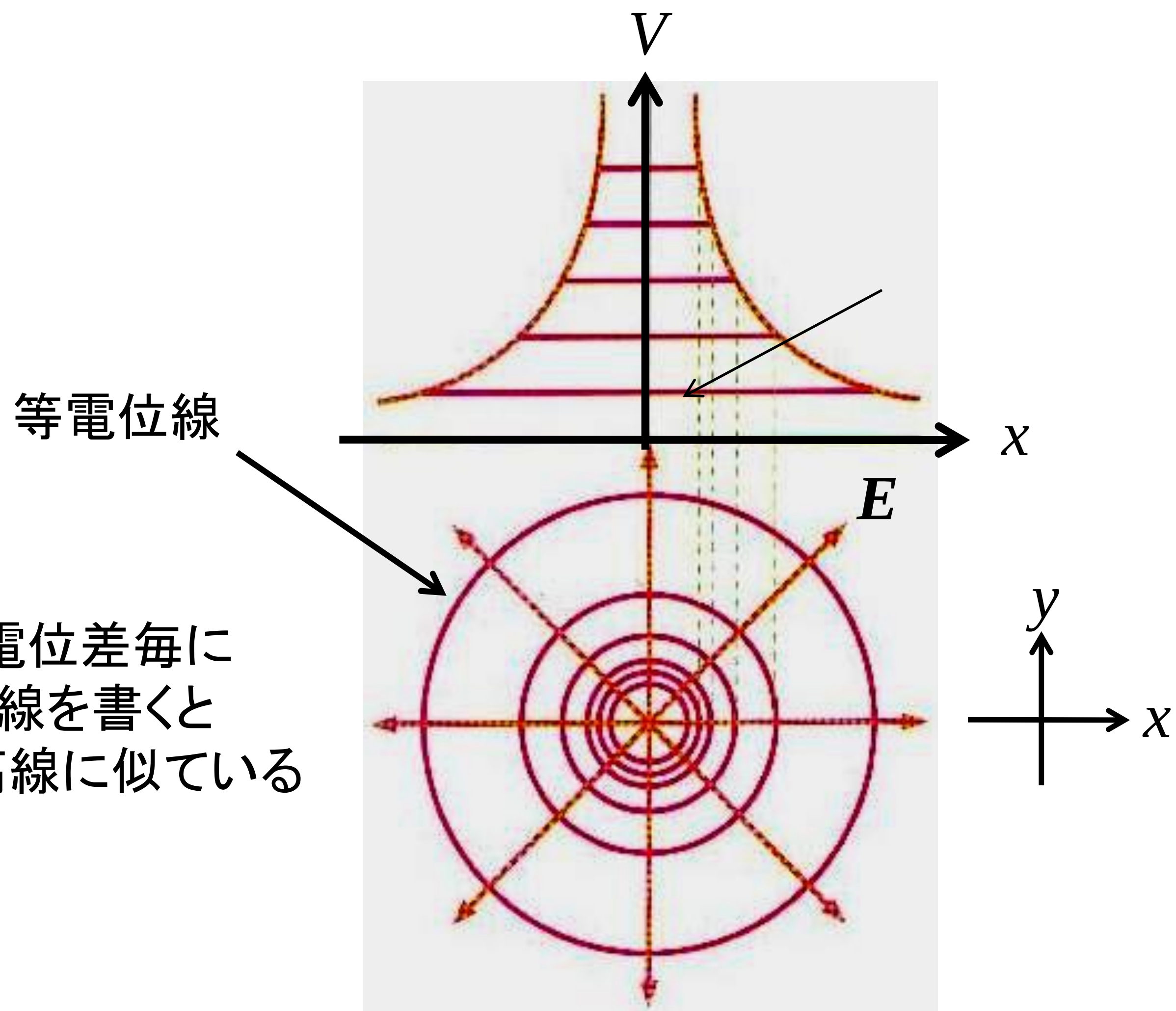
等電位面は
電場と直交

つづき

電場と等電位面は 直交 する。電場と等電位線も 直交 する。

直交しないと、等電位面にそった方向にも電場が存在する。（等電位と矛盾）

例: xy 平面の原点にある正の点電荷の周辺の電位 V



一定の電位差毎に
等電位線を書くと
地図の等高線に似ている

等電位線と地図の等高線の類似

対応関係

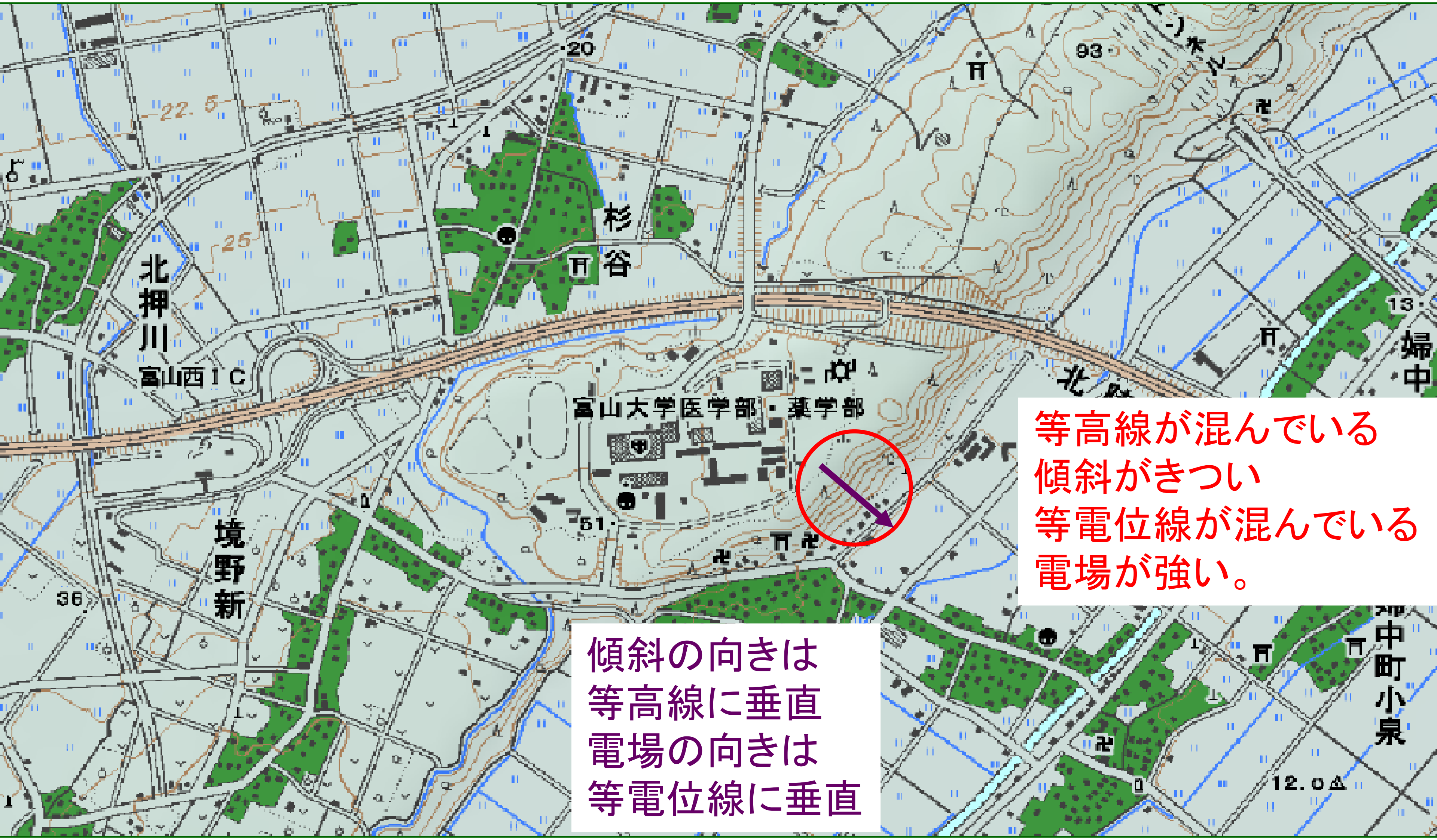
等電位線	等高線
電位	標高
電場	地面の傾斜
等電位線が混んでいる || 電場が強い	等高線が混んでいる || 傾斜が大きい
等電位線と電場は垂直	等高線と傾斜は垂直

問題：電気力と万有引力の対応関係（前回スライド⑯参照）において
電位に対応するものは何か？

電位は単位電荷あたりの位置エネルギー
対応するものは、単位質量あたりの位置エネルギー（特に名称はない）
地上においては、位置エネルギーは mgh なので、gh が対応する。

標高×9.8 が対応しているので、等電位線と等高線が類似するのは当然

大学付近の地図



等高線が混んでいる
傾斜がきつい
等電位線が混んでいる
電場が強い。

傾斜の向きは
等高線に垂直
電場の向きは
等電位線に垂直

1次元の場合の保存力 F と位置エネルギー U の関係

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

3次元の場合の保存力 $\boldsymbol{F}$ と位置エネルギー U の関係

保存力$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ の各成分は、位置エネルギー U を偏微分することで導かれる

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

読み：デルユー
デルエックス

もう少し、丁寧に書くと・・・

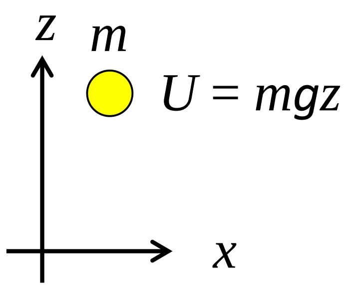
$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \qquad F_y(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \qquad F_z(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

⇩

一般に位置エネルギー U は位置 x,y,z の関数になっている。

xで偏微分するというのは、y, z は定数と考えて x で微分すること。

問題:質量mの物体に作用する重力 $\boldsymbol{F}$ を位置エネルギーU を偏微分して求めよ。 ㉓
ただし、z軸を図のように鉛直上向きにとる。



$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg$$

下向きに mg

$$\boldsymbol{F} = (\ 0,\ 0,\ -mg\ )$$

一般には保存力$\boldsymbol{F}$ は位置 x,y,z の関数であるが、この場合は定数(どこでも同じ値)
U の勾配がどこも一定だから

でんじろう先生のシャボン玉の実験の映像を見て、どうやっているのか考えよう。

これまで4回の授業で勉強したので、わかると思います。

問題①なぜ手でシャボン玉を操れるのか。
問題②シャボン玉の破片をどうやって集めたのか。

次回やってみますが、うまくいかないかも。
バンデグラフ無しでもできます。興味のある人は挑戦してみたら