Q & A

Q: 電磁誘導が自然現象で起こっている例はありますか？
A: 1989年3月13日にカナダのケベック州で大停電が発生しましたが、これは電磁誘導によるものです。原因は太陽フレアに伴う磁気嵐です。電磁誘導ですから磁場の変動によって起こりますが、磁気嵐による磁場の変動の絶対値は大きくありません。しかし、空間的な大きさは地球規模のスケールのですので、送電線やパイプラインのような非常に大きなスケールのものは大きな影響がでます。

レポートについて

締め切りは過ぎましたが、今から提出してもOKです。（多少の減点はあります。）

自己誘導（p275）

コイルを流れる電流 I が変化 →そのコイル自身を貫く磁場が変化

→ 誘電起電力が生じる。この電磁誘導現象を **自己誘導** という。

自己誘導による起電力を **逆起電力** ともいう。

電流を変化を妨げる向きなので「逆」 例：電流が増加する場合は減少させる向き

回路（コイル）を貫く磁束 $\Phi_B \propto$ 電流 I

コイルが N 巻きの場合、回路を貫く全磁束は、$N\Phi_B$（$\propto$ 電流 I）

（ここで Φ_B は、コイル1巻きを貫く磁束）

全磁束を書画カメラで説明

比例定数を L とすると，　全磁束 $= N\Phi_B = LI$

1 A あたりの全磁束

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

L をインダクタンス、**自己インダクタンス** という

インダクタンスの単位は **ヘンリー**，記号 H = Wb/A = T･m^2/A= V･s/A

電磁誘導の法則：$V_{\mathrm{i}} = -N\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t}$　なので

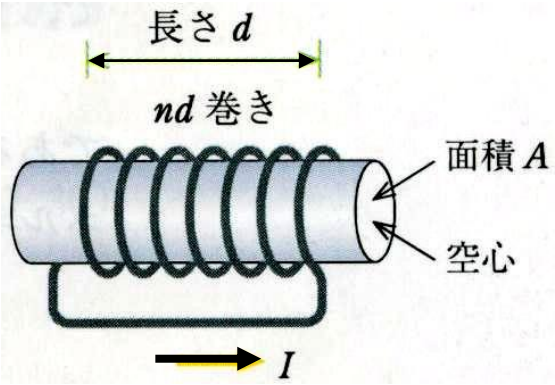
全磁束 $= N\Phi_{\mathrm{B}} = LI$　より（時刻 t で微分すれば上式）

自己誘導の誘導起電力（逆起電力）：$\boxed{V_{\mathrm{i}} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$

（自己インダクタンス L は、電流の変化率にかかる比例定数）

例題3（p276）①：左図のような空心のソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ。ソレノイドは十分に長いものとして計算せよ。

n：単位長さあたりの巻き数



ソレノイド内部の磁場：　$B = \mu_0 nI$

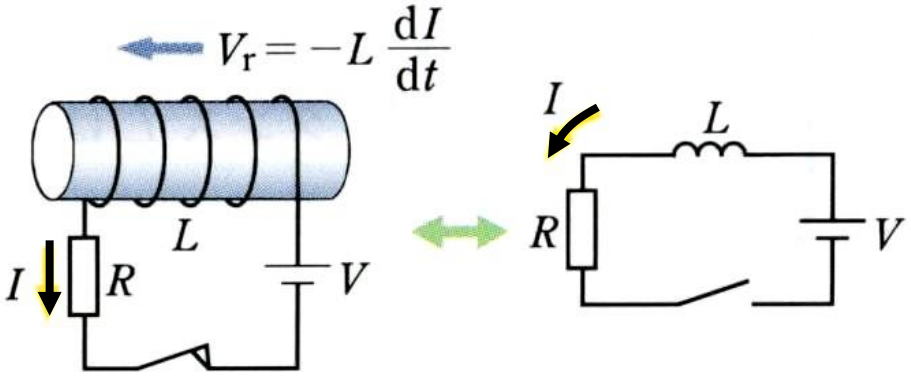
磁束 $\Phi_{\mathrm{B}} = BA = \mu_0 nIA$

$$L = \frac{N\Phi_{\mathrm{B}}}{I} = \frac{nd\Phi_{\mathrm{B}}}{I} = \frac{nd\,\mu_0 nIA}{I} = \mu_0 n^2 Ad$$

②面積 $A = 4\ \mathrm{cm}^2$、長さ $50\ \mathrm{cm}$、巻き数 $N = 200$ のとき自己インダクタンスを計算せよ。

$$L = \mu_0 n^2 Ad = 4\pi \times 10^{-7} \times 400^2 \times 0.0004 \times 0.5 \fallingdotseq 4 \times 10^{-5}\ [\mathrm{H}]$$

LR回路



回路の全起電力は

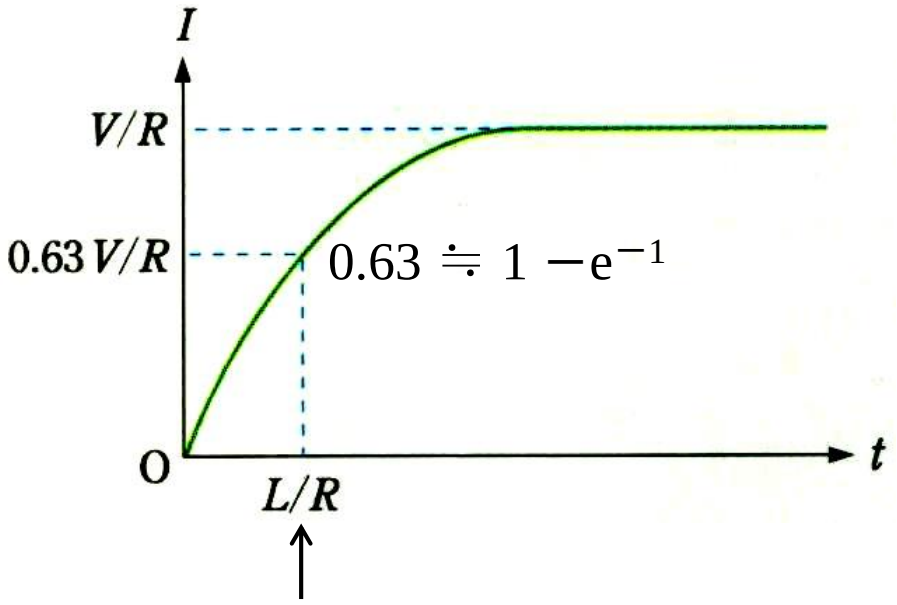
電池の起電力 V ＋誘導起電力 $-L\dfrac{dI}{dt}$

よってオームの法則は、

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

$t = 0$ でスイッチを入れた場合

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$ 解き方は⑳



コイルがなければ、電流はすぐに

$\dfrac{V}{R}$ となるが、コイルがあると

逆起電力が発生し、

その値となるのに時間がかかる。

その時間の目安が時定数 τ である。

$$\tau = \frac{L}{R}$$

時定数

残りの変化が 1/e（約37%）になる時刻

（CR回路等の時定数も同じ）

問題：LR回路において、コイルのインダクタンスが
⑰の問題と同じ 4×10^{-5} H，抵抗が 1 kΩ（1000 Ω）の場合の時定数を求めよ。
（1 H という値はとても大きな値）

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4\times10^{-5}}{1000} = 4\times10^{-8}\ [\mathrm{s}]$$

（参考）⑱の微分方程式の解き方はCR回路の場合と、ほぼ同じ（テストに出ません）⑳
教科書にも載っていない。

$$V - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI \quad (L,R,V\text{は定数})$$

$$\frac{1}{V/R - I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{L}$$

I に対する変数分離型微分方程式

$$\int \frac{\mathrm{d}I}{V/R - I} = \frac{R}{L}\int \mathrm{d}t$$

$$\ln\left|\frac{V}{R} - I\right| = -\frac{Rt}{L} + c \quad c\text{は任意定数}$$

正

$$\ln\left(\frac{V}{R} - I\right) = -\frac{Rt}{L} + c$$

$t = 0$ のとき $I = 0$ なので $c = \ln\left(\frac{V}{R}\right)$

$$\ln\left(1 - \frac{R}{V}I\right) = -\frac{Rt}{L}$$

真数に戻すと

$$1 - \frac{R}{V}I = \mathrm{e}^{-Rt/L}$$

$$\frac{R}{V}I = 1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}$$

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L}\right)$$

磁場のエネルギー（p277）

コイルに流れる電流を増すと、電流の増加を妨げる向きに逆起電力が発生する。

↓

たとえコイルの電気抵抗が無くてもても、
逆起電力に逆らって電流を増すには仕事をする必要がある。
この時に投入したエネルギーが、磁場のエネルギーとして蓄えられる。
超伝導のように抵抗が無い場合も電流を流し続けるのにエネルギーはいらないが、
電流を増加させるには、エネルギーが必要。

回路に電流 I が流れている時に
時間Δtで、ΔI だけ電流を増すのに必要な仕事ΔWは

$$\Delta W = \text{電圧（逆起電力）} \times \text{電荷} = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \times I\Delta t = LI\Delta I$$

$W=QV$

電流を 0 から I まで増すときに必要な仕事 : $W = \int_0^I LI\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI^2$

電流 I が流れている自己インダクタンス L のコイルの磁気的なエネルギー

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

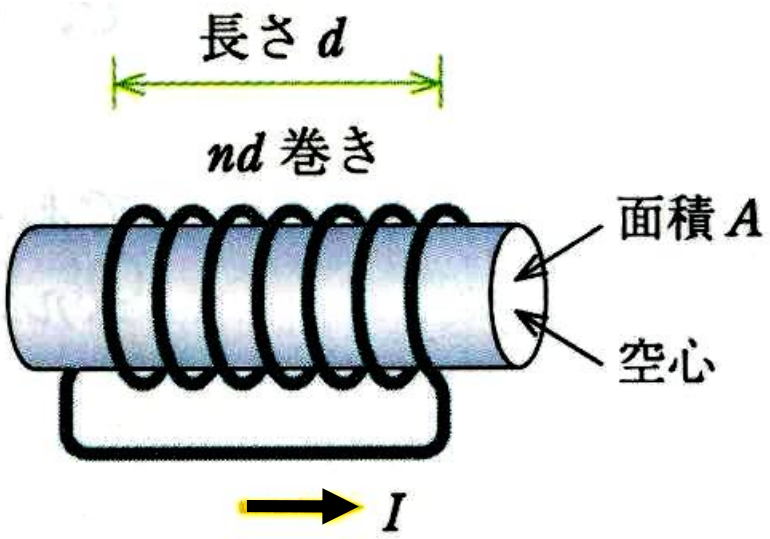
長いソレノイドに蓄えられたエネルギー

ソレノイドの内部の磁場：$B = \mu_0 nI$

ソレノイドの自己インダクタンス：$L = \mu_0 n^2 Ad$

磁気的なエネルギー：$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 AdI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 (Ad) = \frac{1}{2\mu_0} B^2 (Ad)$

ソレノイド内の体積



単位体積あたりの磁場のエネルギー u_B は

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad （真空中）$$

参考：電場のエネルギー u_E は

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad （真空中）$$

どちらも2乗に比例する。

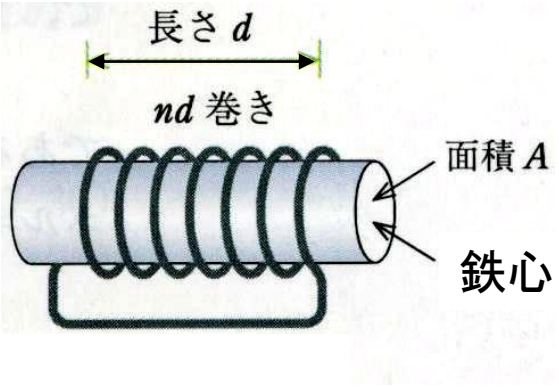
最強の永久磁石はネオジム磁石です。ネオジム磁石の表面付近の磁場の強さは約 0.5 Tです。問題：ネオジム磁石の表面付近の 1 cm^3 の部分の磁場のエネルギーを求めよ。 ㉓

$$u_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \fallingdotseq 1.0 \times 10^5 \ \mathrm{J/m^3}$$

$$1.0 \times 10^5 \ [\mathrm{J/m^3}] \times 10^{-6} \ [\mathrm{m^3}] = 0.1 \ [\mathrm{J}]$$

ソレノイドの内部が比透磁率 μ_r の鉄心で満たされている場合

ソレノイドが十分に長い場合、内部の磁場の強さは $B = \mu_r \mu_0 nI$ である。
問題：このソレノイドの自己インダクタンス L はいくらか。⑰参照



磁束 $\Phi_B = BA = \mu_r \mu_0 nIA$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{nd\Phi_B}{I} = \frac{nd\mu_r\mu_0 nIA}{I} = \mu_r\mu_0 n^2 Ad$$

磁気的なエネルギー：$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_r\mu_0 n^2 AdI^2 = \frac{1}{2} \mu_r\mu_0 n^2 I^2 (Ad) = \frac{1}{2\mu_r\mu_0} B^2 (Ad)$

単位体積あたりの磁場のエネルギー：　$u_B = \frac{1}{2\mu_r\mu_0} B^2$　（比透磁率μ_rの物質中）

$$u_B = \frac{1}{2\mu} B^2$$

↑ 透磁率

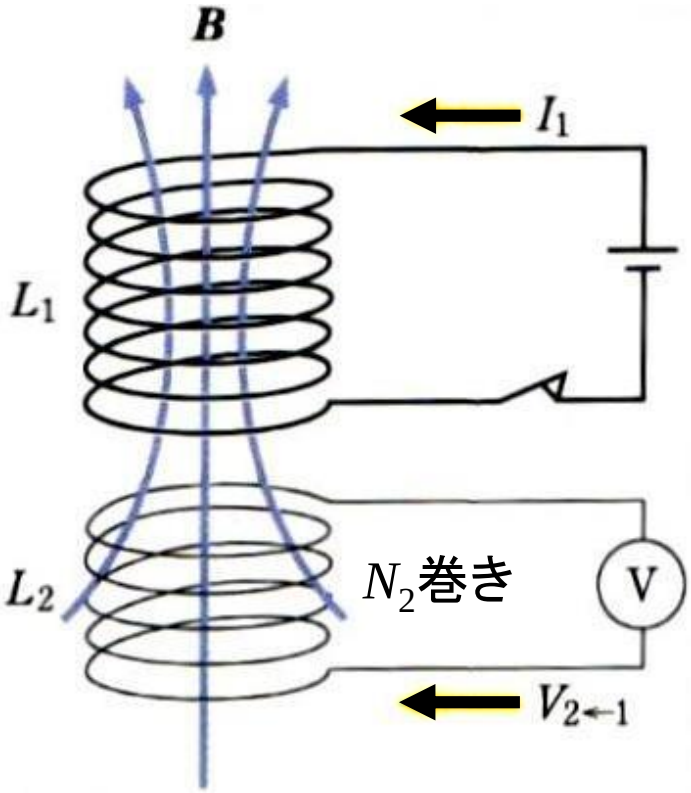
真空の場合の $\frac{1}{\mu_r}$ 倍だが B がμ_r倍になっているので、電流が同じ場合は空心のμ_r 倍

最強の永久磁石はネオジム磁石です。ネオジム磁石の表面付近の磁場の強さは約 0.5 Tです。問題：ネオジム磁石の表面付近の 1 cm^3 の部分の磁場のエネルギーを求めよ。 ①

$$u_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 0.5^2 \fallingdotseq 1.0 \times 10^5 \ \mathrm{J/m^3}$$

$$1.0 \times 10^5 \ \mathrm{J/m^3} \times 10^{-6} \ \mathrm{m^3} = 0.1 \ \mathrm{J}$$

相互誘導（p277）



スイッチを入れると、

コイルL_1を流れる電流 I_1 が変化する

↓

電流 I_1 が作る磁場が変化する

↓

コイルL_2を貫く磁束が変化する。

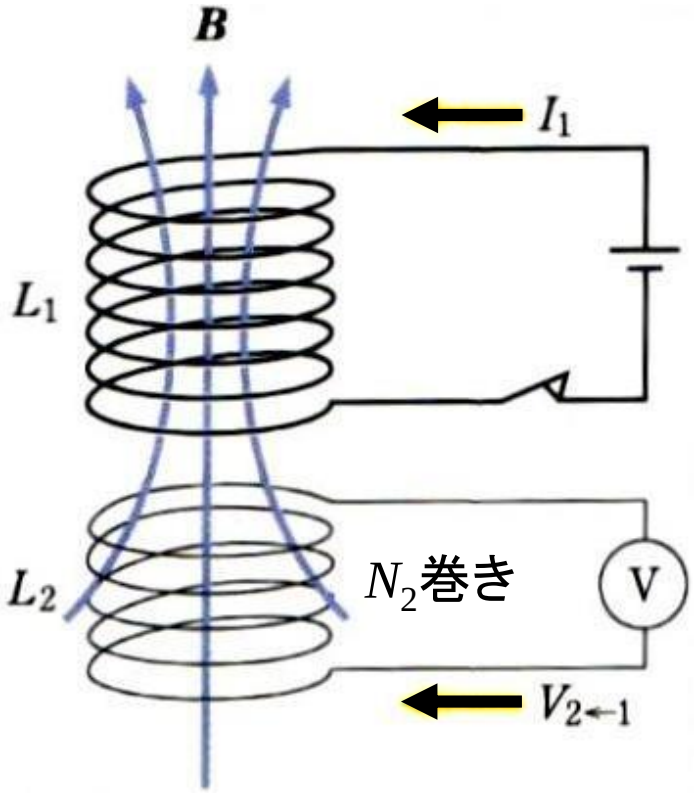
↓

コイルL_2に、磁束の変化を妨げる方向に
誘導起電力 $V_{2\leftarrow1}$が発生する。

相互誘導

1つの閉回路の電流が変化すると、
他の閉回路に誘導起電力が生じる現象

相互誘導



コイル L_1を流れる電流 I_1が作る磁束のち、
コイルL_2内を貫く磁束を$\Phi_{2\leftarrow1}$とすると　（1巻きを）

$\Phi_{B(2\leftarrow1)}$

$$V_{2\leftarrow1} = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_{2\leftarrow1}}{\mathrm{d}t}$$

全磁束 $N_2\Phi_{2\leftarrow1} \propto I_1$　なので

$N_2\Phi_{2\leftarrow1} = M_{21}I_1$とすると、（$M_{21}$は比例定数）

$N\Phi_B = LI$
自己誘導

$$V_{2\leftarrow1} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

逆にコイル L_2 に流れる電流 I_2 が
変化すると、コイルL_1に
誘導起電力 $V_{1\leftarrow2}$が発生する。
以下同様。証明は省略するが

$$M_{12} = M_{21}$$
相互インダクタンスの相反定理

相互インダクタンス $M_{21} = \dfrac{N_2\Phi_{2\leftarrow1}}{I_1}$

単位：ヘンリー，記号 H

添え字は意味ないので単にM でよい。

$$V_{1\leftarrow2} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

$$V_{2\leftarrow1} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

自己誘導と同じ形：　$V_i = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

21.5 交流（p278）

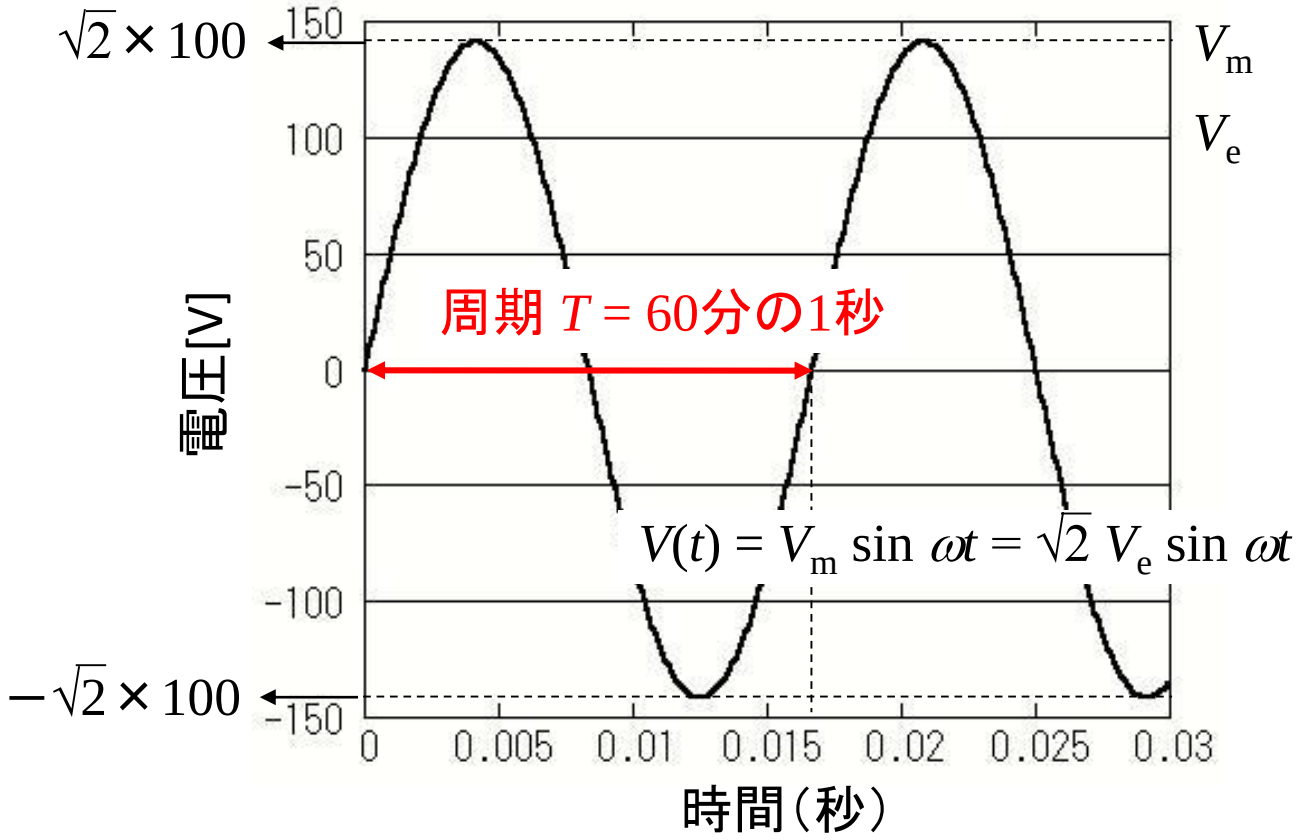
直流：電流の向きが、時間とともに変化しない。DC（Direct Current）
交流：電流の向きが、時間とともに絶えず交替し続ける。AC（Alternate Current）

家庭用の電源（コンセント）の電圧（ホットの電位）の時間変化

コールド，アース
グランド，0 V

ホット，ライブ
（右のグラフ）

注：延長コードの場合は、プラグの差し込み方で逆になることがある。



家庭用電源の周波数 f：西日本 60 Hz，東日本 50 Hz，　富山は 60 Hz

$$V(t) = V_{\mathrm{m}} \sin \omega t = \sqrt{2}\, V_{\mathrm{e}} \sin \omega t$$

V_{m}：電圧の最大値 maximum 、V_{e}：電圧の effective **実効値**

家庭用の電源は100 V だが、この100 Vは実効値のこと。

最大値はその$\sqrt{2}$倍の約141 Vである。

ω, f, T の名称：

物体の回転	角速度ω	回転数 f	周期 T
物体の振動	角振動数ω	振動数 f	周期 T
交流	角周波数ω	周波数 f	周期 T

交流とオームの法則

$V = RI$（電圧・電流が一定の時）

$V(t) = RI(t)$（電圧・電流が時間とともに変化しても成り立つ）

$$V(t) = RI(t) = V_{\mathrm{m}} \sin \omega t = \sqrt{2}\, V_{\mathrm{e}} \sin \omega t$$

$$I(t) = \frac{V_{\mathrm{m}}}{R} \sin \omega t = \sqrt{2}\, \frac{V_{\mathrm{e}}}{R} \sin \omega t$$

$$I(t) = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t = \sqrt{2}\, I_{\mathrm{e}} \sin \omega t$$

I_{m}：電流の最大値

I_{e}：電流の実効値

$V_{\mathrm{m}} = RI_{\mathrm{m}}$, $V_{\mathrm{e}} = RI_{\mathrm{e}}$

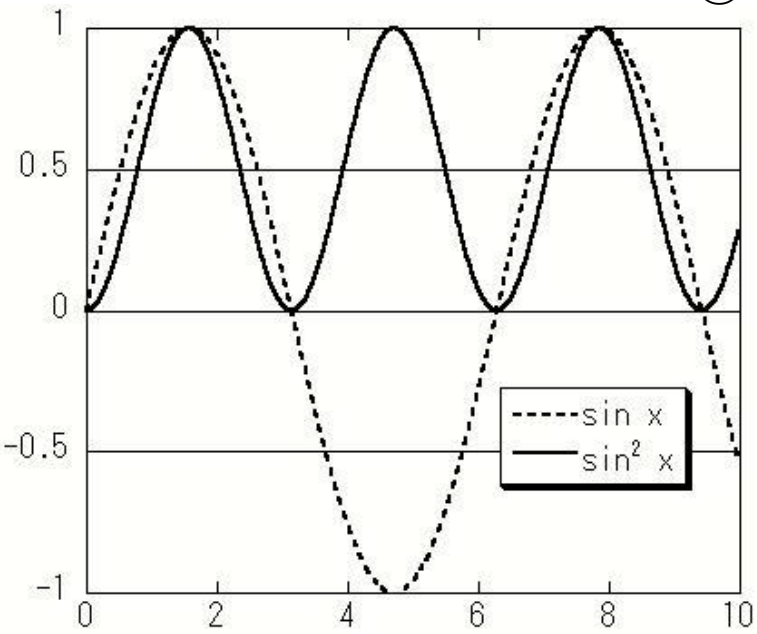
交流の電力

電力 $P(t) = V(t)\, I(t)$

回路にコイルやキャパシターを含まない場合、
電圧 V と電流 I の位相は揃っている。

電力 $P(t) = V(t)\, I(t) = V_m I_m \sin^2 \omega t = 2V_e I_e \sin^2 \omega t$

電力の時間平均 $<P> = 0.5\, V_m I_m = V_e I_e = R I_e^2 = \dfrac{V_e^2}{R}$



実効値は、交流の実質的な指標であり、オームの法則 $V_e = RI_e$ も成り立ち、

上記のように電力の平均も実効値を使うと直流の時と同じである。

最大値はオームの法則（$V_m = I_m R$ ）は成り立つが、電力は $<P> \neq V_m I_m$

注意：コイルやキャパシターを含む回路は一般に $<P> \neq V_e I_e$

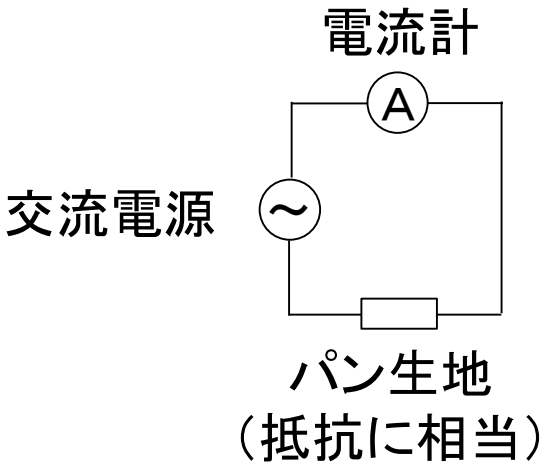
（電圧 V と電流 I の位相がずれている）

電気パンの実験（再考）

ジュール熱でパン（ホットケーキ）をつくる

ステンレスの電極を
コンセント（ $V_e = 100$ [V] ）に接続

回路図



電流計の
示す値は
実効値 I_e である。

牛乳パックの下の部分

スタート時刻：＿＿＿＿＿＿＿＿　電流：0.166 A　電力：16.6 W

終了時刻：＿＿＿＿＿＿＿＿　電流：＿＿＿＿＿＿＿＿　電力：＿＿＿＿＿

問題：消費した電力量：

4. 結果

フライパンで焼いたホットケーキはきつね色に焦げるがこのパン焼き器ではカステラのように一様に膨らみ、すべて同じ色である。これはパンの中で電流による発熱が一様なためである。

時間【分】	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i【A】	0.166	0.213	0.263	0.272	0.247	0.229	0.236	0.228	0.215	0.189	0.169	0.019	0.008	0.006	0.006
V【v】	99.3	98.8	98.5	98.4	98.7	99.1	99.4	99.6	99.7	100.1	100.2	102.5	102.5	102.5	102.5

上の表は回路に流れる電流の時間変化のグラフである。表より電流の平均値は 0.164 電圧の平均値は 100.12 なのでこの電子パン焼き器の電力は約 16.4W である。また 14 分間でパンが焼けるまでに消費された熱エネルギーは

$Q=Vit=100.12\times0.164\times14\times60=13792j=3283cal$

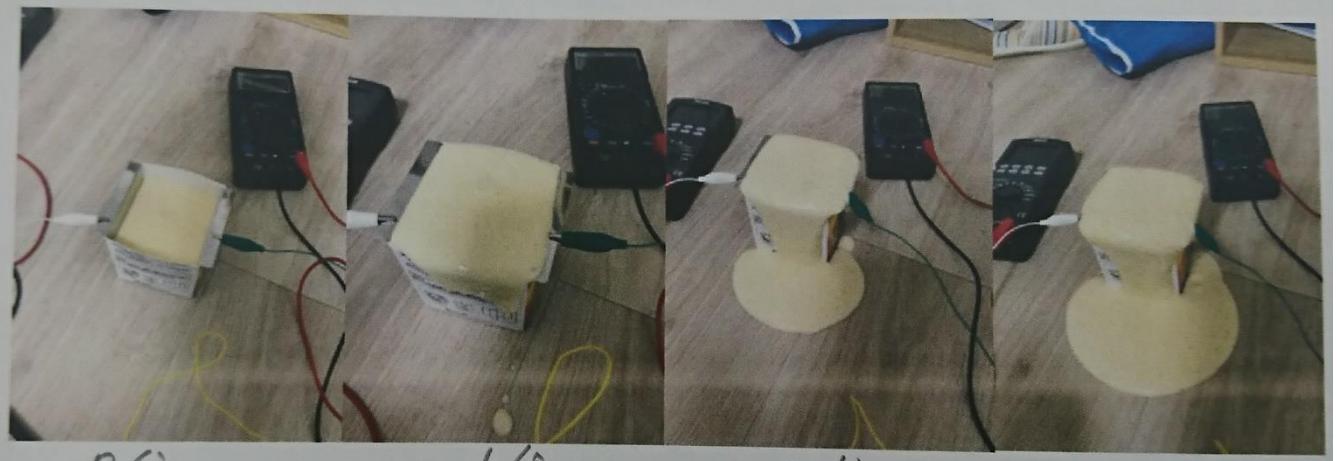
またパン種であるホットケーキミックスの抵抗は

$R=100.12\div0.164=610.4\Omega$

またパン種であるホットケーキミックスの抵抗は

R＝100.12÷0.164＝610，4Ω

回路全体図



0分　1分　2分　3分

4分　5分　6分　7分

5. 感想

今回の実験はちゃんとパンを焼くことができたのでおおむね成功といえる。
ただ、パン種をいれすぎたため、パンが牛乳パックからあふれてしまった。今度や
ときは容器に余裕を持たせて入れるようにする。なお焼けたパンはシロップをかけ
食べた。思ったより美味しかった。

コイルやキャパシターが含まれる交流回路

$V(t) = V_m \sin \omega t$

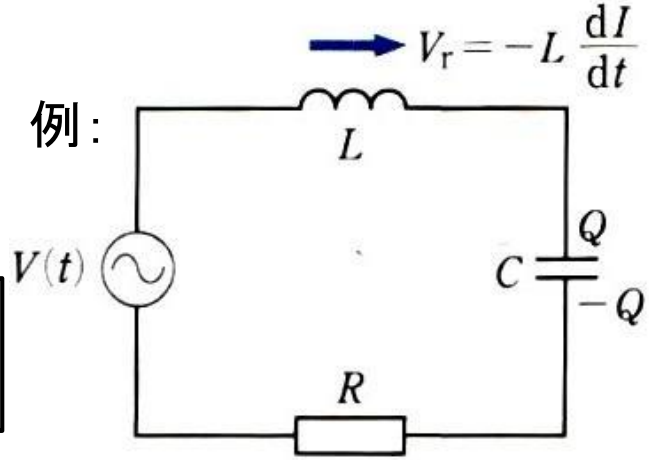
$I(t) = I_m \sin(\omega t - \phi)$

電圧と電流の
位相はそろわない。

角ϕ:

位相のずれ（遅れ）

例：



電圧と電流の比

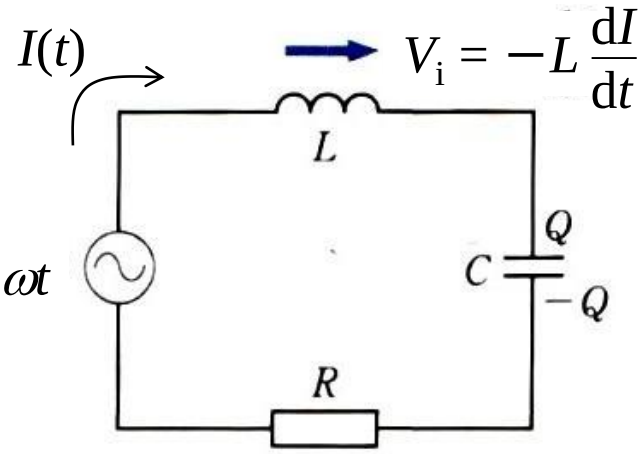
直流回路

抵抗：$R = \frac{V}{I}$

交流回路

インピーダンス：$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$

RLC回路（p280）



極板間の電位差：$\frac{Q}{C}$

「回路の全起電力」＝「抵抗での電圧降下」＋「キャパシターでの電圧降下」

（電源の起電力＋誘電起電力）

未知関数２個

$$V_m \sin \omega t - L\frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}$$

I

t で微分して　$$\omega V_m \cos \omega t - L\frac{d^2I}{dt^2} = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \omega V_m \cos \omega t$$

未知関数１個
⇒解ける

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = \omega V_\mathrm{m}\cos\omega t$$

この微分方程式は抵抗のある強制振動の運動方程式と同じ形

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0\cos\omega t$$

速度に比例する抵抗　　復元力　　周期的に変化する外力

一般解 : $x(t) = x_0\cos(\omega t - \phi) + Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\ t + \theta_0)$

A と θ_0 は任意定数

外力の角振動数 ω での振動

RLC回路でもこの項だけ考える

時間の経過とともに 0 になる。
あまり重要でない。
時間が経つと無くなる項

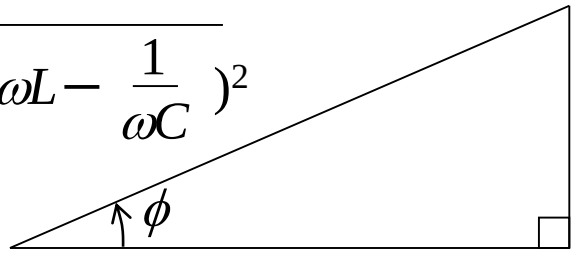
RLC回路でもこの項は時間が経つと無くなるので無視

$$I(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t - \phi) \qquad I_\mathrm{m} = \frac{V_\mathrm{m}}{Z}$$

回路のインピーダンス : $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

（遅れ）
位相のずれ ϕ: $\sin\phi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{Z}$, $\cos\phi = \dfrac{R}{Z}$, $\tan\phi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$

図で表現すると



ϕ は負にもなる。

コイルは電流の位相を遅らす。
キャパシターは早める

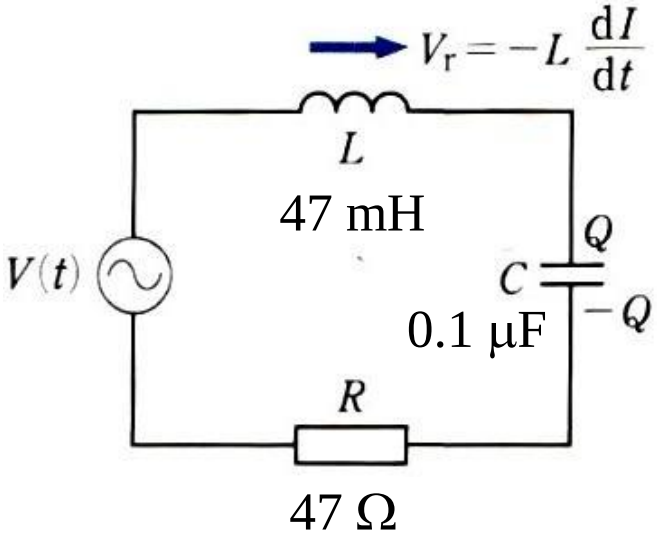
インピーダンス Z は、$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$ のとき最小になり、電流は最大になる（共振する）

$\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$

その時の角周波数 ω_R は $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

周波数（ 共振周波数 ）f_R は $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

物理実習（RLC回路）の値は図のとおりです。



問題①：左図のRLC回路の共振周波数を求めよ。

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \fallingdotseq 2.3\times10^{3}\ \mathrm{Hz}$$

問題②：交流電源の周波数が、①で求めた共振周波数のときの、回路のインピーダンス Z はいくらか。

$47\ \Omega$

問題③：交流電源として富山の家庭用電源（コンセント）を用いたときの、回路のインピーダンスはいくらか。

$$\omega = 2\pi f \fallingdotseq 3.8\times10^{2}\ \mathrm{rad/s}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \fallingdotseq 2.6\times10^{4}\ \Omega$$

18　　2.6×10^{4}

（つづき）問題④：回路を流れる電流の実効値 I_e を求めよ。

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e} \qquad I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{100}{2.6 \times 10^4} \fallingdotseq 0.0038 \ \mathrm{A}$$

問題⑤：回路の消費電力を求めよ。ヒント：コイルとコンデンサではエネルギーは消費されない。抵抗でのみジュール熱となる。

$$P = RI_e^2 \fallingdotseq 6.8 \times 10^{-4} \ [\mathrm{W}]$$

交流回路の消費電力は電源の電圧をV_eとするとV_eI_e ではなく、

$RI_e^2 = \frac{R}{Z} V_eI_e = \cos\phi \, V_eI_e$ である。この赤字の因子を［　力率　］という。

問題⑥：この場合の力率を求めよ。

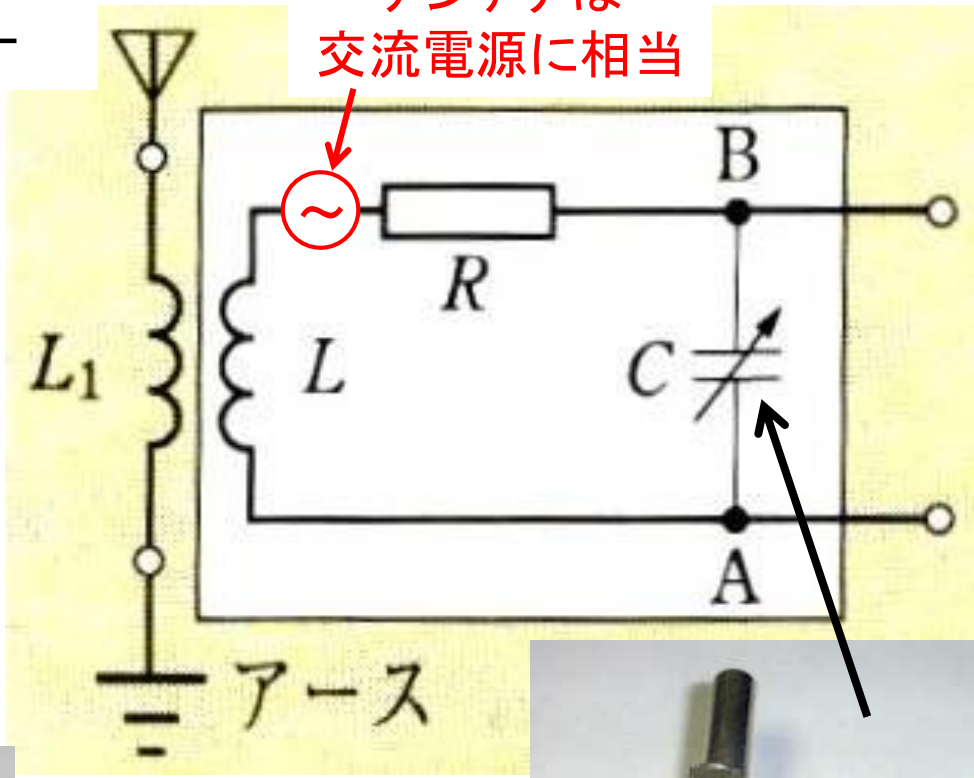
$$\frac{R}{Z} \fallingdotseq 0.0018$$

(参考)同調回路

(RLC回路)

ラジオやテレビの受信機は、共振を利用して特定の周波数の放送を選び出す

アンテナ



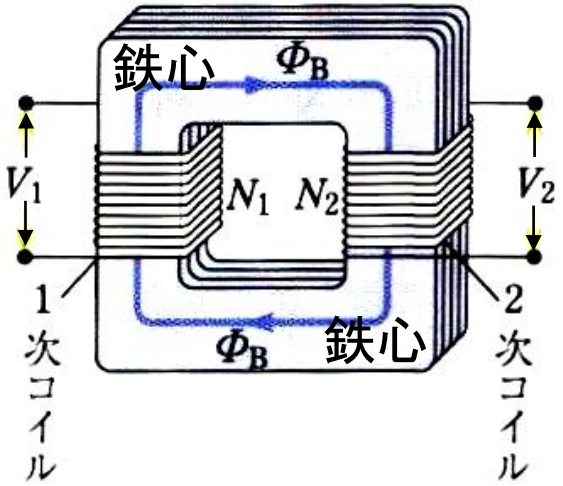
ゲルマニウムラジオは
電池は必要ない。
電波のエネルギーで動作する。

variable
バリコン
可変コンデンサ

変圧器（トランス） p281

相互誘導を利用して交流の電圧を上げたり下げたりする装置

鉄心を通る磁束は、ほとんど外にもれない→それぞれのコイルを貫く磁束は等しい



電磁誘導の法則より

1次コイルに生じる逆起電力：$V_{i1} = -N_1 \dfrac{d\Phi_B}{dt}$

2次コイルに生じる誘導起電力：$V_2 = -N_2 \dfrac{d\Phi_B}{dt}$

逆起電力 V_{i1} と外部から加えた交流電圧 V_1 はつり合う（ $|V_1| = |V_{i1}|$ ）

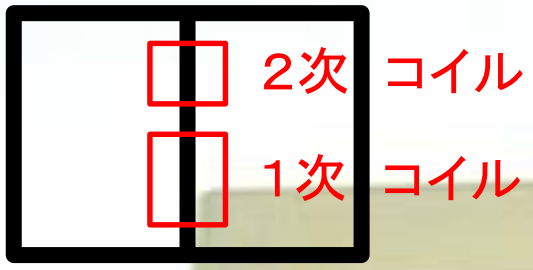
符合は気にせず、大きさだけ考えると

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{V_{i1}}{N_1} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$\dfrac{N_2}{V_1}$ を両辺にかけて $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$ （ $V_2 = V_1 \dfrac{N_2}{N_1}$ ）

電圧の比＝巻き数の比

トランスの実物



例:8 巻
交流 8 V

交流 100 V
例:100巻

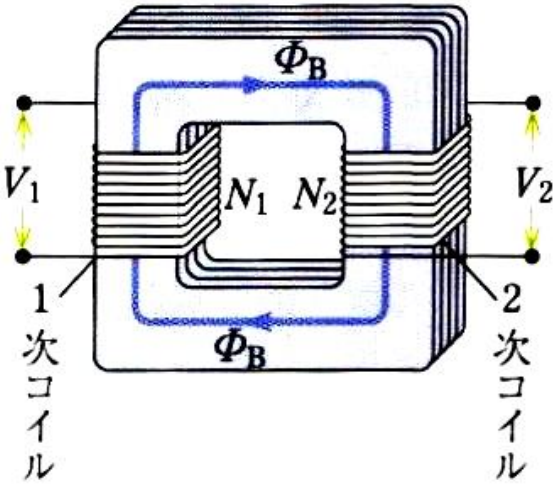
下側の 100 V が入力
で上側が出力として
使うことが一般的。
ダイオード等を使って
直流にして使用したりする。

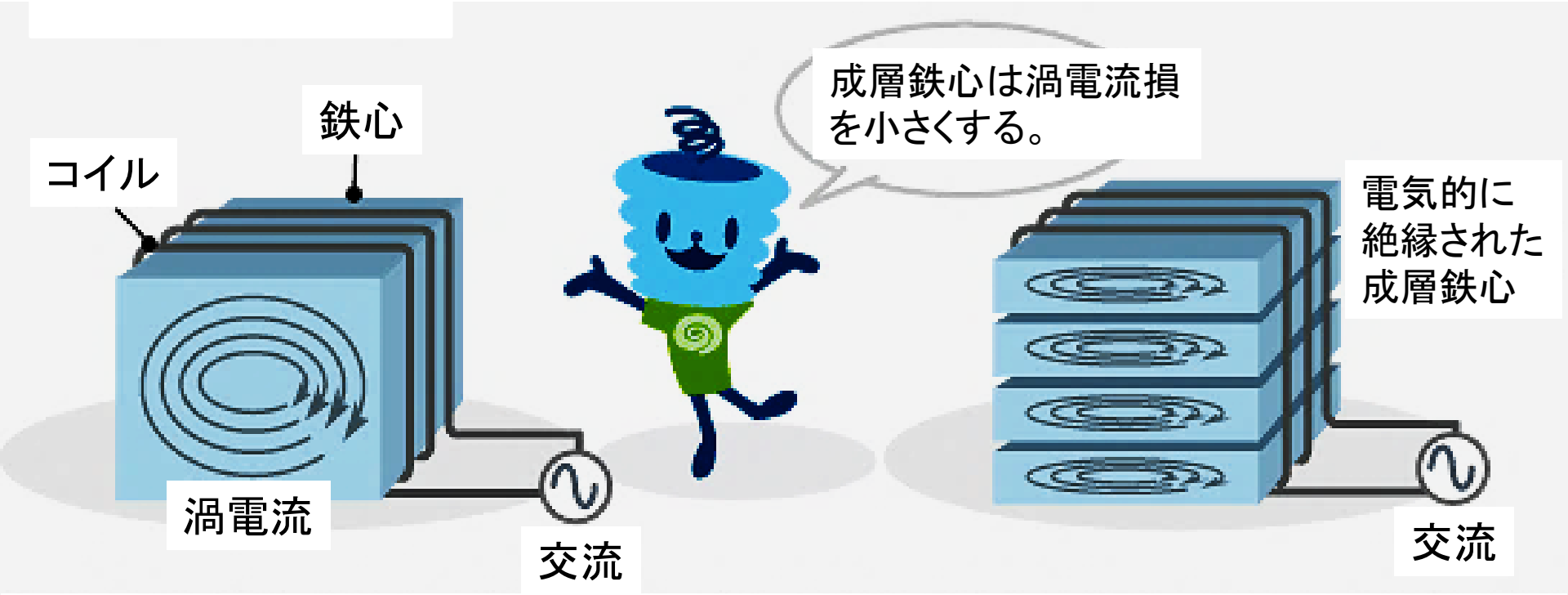
逆に上側を入力として
下側を出力として
使うこともできる。

問題：右下のようなトランスにおいて 200 巻きの１次コイルに実効値 100 V の家庭用電源を接続した。２次コイルの巻き数を 20 とすると2次コイルに生じる誘導起電力の実効値は何 Vか？

$$V_2 = 100 \times \frac{20}{200} = 10$$ 10 V

問題：トランスの鉄心は、なぜ積層構造になっている？





変圧器（トランス）の鉄心など、コイルに交流が流される鉄心では、磁束変化による渦電流損（発熱）が発生する。電気的に絶縁して成層した鉄心を用いると、渦電流損を大幅に低減できる。鉄心の損失にはヒステリシス損も関係するため、ケイ素鋼などヒステリシスの小さい材料が用いられる。

N枚に分けると1枚当たりの誘導起電力は$1/N$、抵抗はN倍、誘導電流は $1/N^2$
ジュール熱I^2R は、$1/N^3$、合計のジュール熱はN枚なので $1/N^2$

TDK 電気と磁気のはてな館より転載