

Q: (ブランコで)まず、行きと帰りどっちをこいでいるのでしょうか。わかりません。帰り？

A: 漕いでいるのは行き(後方から前方へ行くとき)です。

Q: ブランコに1人が座り、もう一人が逆向きに立って2人で行き帰り両方を漕いで遊んでいました。

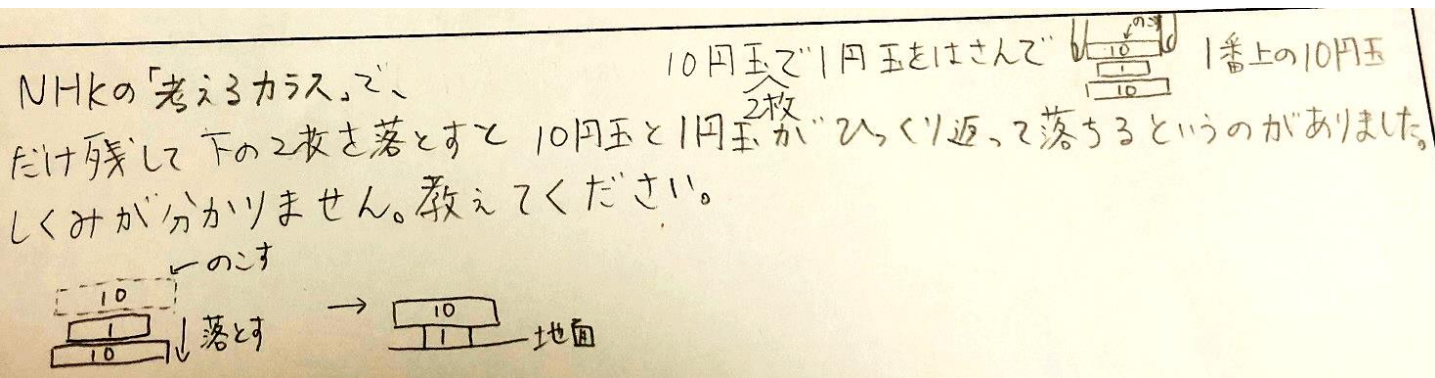
A: この場合、二人とも自分にとっての行きを漕いでいますが、相手は自分にとっての帰りを漕いでいます。2人乗っているの、漕ぐ効率としては、1人で行きだけ漕いでいるのと変わらないことになります。

Q: ブランコ一回転のしくみ。

A: 動画があるので見てみましょう。ちなみにこの人は行きも帰りも漕いでいます。

Q: スケートボードはどうして進むのでしょうか。

A: 私を含めやったことない人も多いので、皆さんもよく知ってる自転車で考えます。自転車も漕がずに進むことができますが、どうやっているのでしょうか？動画を見て考えて下さい。スケボーの質問にも通ずるものがあると思います。



実験①: 上の3枚の内、下の2枚(10円玉の上に1円玉が乗っている)だけで実験。10円玉の方が大きいので、下の10円玉を持つことになります。

結果は、ほぼ、100%回転せずに、そのまま1円玉が上の状態で落ちます。では、上の3枚の場合と何が違うのでしょうか？下の2枚が落ちるのは同じです。違いは3枚の場合は、上の一枚を落とさないようにしなければならないため、そおと下の2枚を落とすことです。

実験②: 実験①と同様に2枚で落とすが、3枚のときのようにそおと落としてみる。

結果は、3枚の時のように1円玉が下になって落ちます。よってそおと落とすと回転し、さっと落とすと回転しないということがわかりました。実験①で回転した人は、意識的にさっと落としてみて下さい。回転しないはずですよ。おそらく、そおと落とすと、2本の指で挟んでいる一方が先にすべり、回転するのだと思います。

Q: (単振動で) この ωt (角度) と変位の関係がよくわかりません。

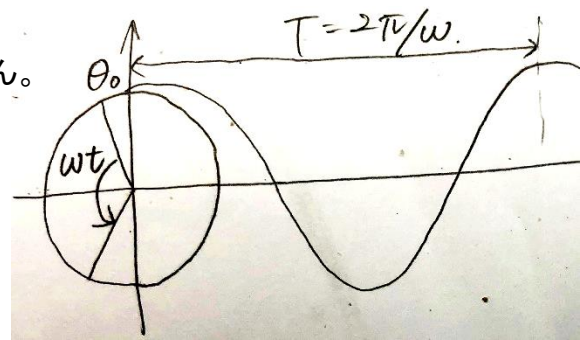
A: 等速円運動では、 ωt は角というイメージでよいです。

単振動では、右のグラフのように、横軸に時刻 t 縦軸に

変位 x をとると、 $x = \cos(\omega t + \theta_0)$ のようになります。

この場合、 ωt は、角というよりは、 $\sin$ や $\cos$ の位相(引数)

です。



$$\frac{d^2y}{dt^2} e^{-\gamma t} - 2\gamma \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} + \gamma^2 y e^{-\gamma t} + 2\gamma \left\{ \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} - y \gamma e^{-\gamma t} \right\} + \omega^2 y e^{-\gamma t} = 0$$

両辺を $e^{-\gamma t}$ で割って

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\gamma \frac{dy}{dt} + \gamma^2 y + 2\gamma \left\{ \frac{dy}{dt} - y \gamma \right\} + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma^2 y - 2\gamma^2 y + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (\gamma^2 - \omega^2) y$$

正・0・負
抵抗 復元力

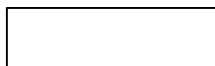
$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2) y = 0$$

正・0・負
抵抗を $2m\gamma v$ とした理由
(簡単になった)

減衰振動の3つの場合分け

抵抗が小さい場合

$$\gamma < \omega$$



$$y = A \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \theta_0)$$

2回微分すると
-がついてもとにもどる
単振動と同じ

$$x = y e^{-\gamma t}$$

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \theta_0)$$

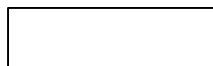
振幅の
減衰

振動を表している部分

振動しながら
振幅がしだいに
小さくなっていく
前ページ左上の図

中間

$$\gamma = \omega$$



$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$y = A + Bt$$

A, B は任意定数

2回微分すると0になる

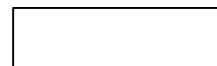
$$x = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

任意定数 A は
 $t = 0$ における
物体の位置

振動はしない。
最もすみやかに
つぎ合いの位置に
収束する。

抵抗が大きい場合

$$\gamma > \omega$$



$$p = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \text{ とおくと}$$

$$y = A e^{pt} + B e^{-pt}$$

2回微分するとともに0になる

$$x = A e^{-(\gamma-p)t} + B e^{-(\gamma+p)t}$$

$\gamma > p > 0$

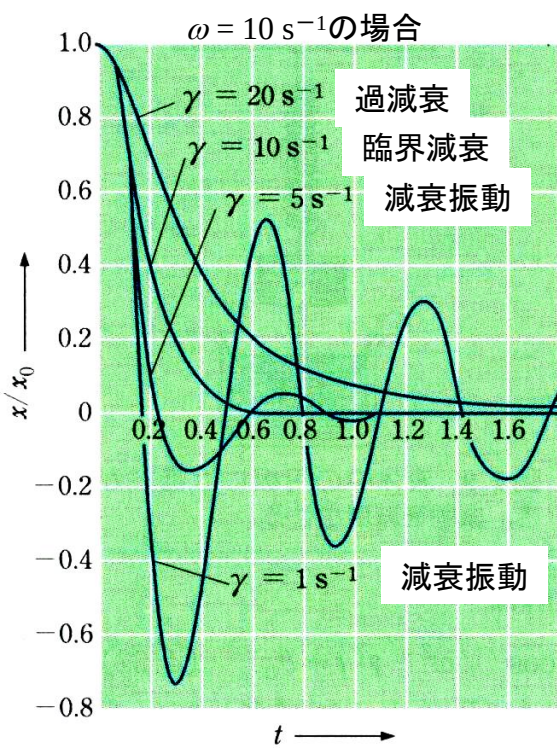
どちらも単調減少

抵抗が大きすぎて
振動はしない。
ゆっくりとつぎ合いの
位置に収束する。
 γ が大きくなるほど
収束にかかる時間も
長くなっていく

抵抗が小さい (γ が小さい) 空気中では
減衰振動するばねとおもりも、
抵抗の大きい (γ の大きい) 水飴の中では
振動せずに過減衰のような
動きになることが想像できよう。

問題: 身近な例で上記の3つの例を探してみよ。

減衰振動(例題4)の微分方程式が解けることを
この授業では要求しません。
この解が γ (抵抗) の大きさによって3つに場合分けされ
おおまかにどのような運動をするのかを
理解するようにして下さい。



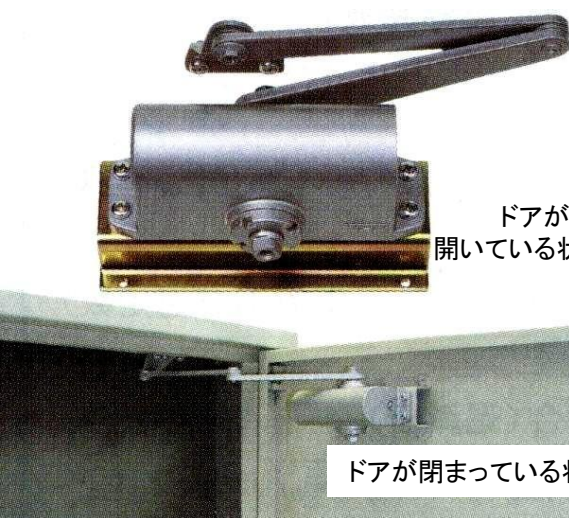


問題：バイクやスポーツタイプの自転車には、上の図のようなフロントフォークやリアサスペンションがついている。(自動車にも同じようなものがついている。)これは、ばねと抵抗を組み合わせた装置で、これによって、路面に凹凸があった時の衝撃をやわらげる。日頃の経験より、この車体の運動は、3つの分類のうちのどれにあたると思うか？また、抵抗が大きすぎると、どのような問題があるかを述べよ。逆に抵抗が小さすぎるとどのような問題があるかを述べよ。(注)抵抗は、実際には厳密に速度に比例するわけではない

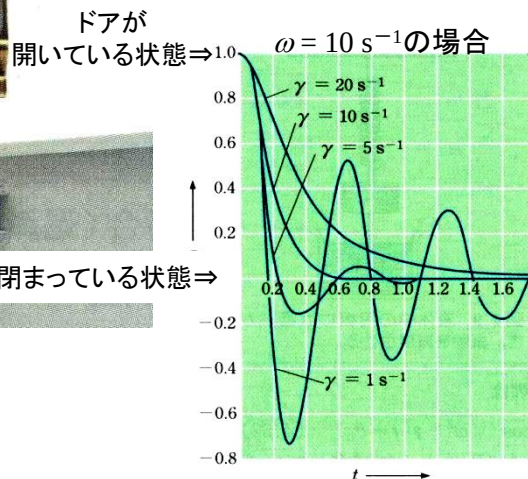
減衰振動 臨界減衰 過減衰

抵抗が大きすぎると：

抵抗が小さすぎると：



問題：左の写真はドアについている減衰装置です。これは、ドアを閉じようとするばねと抵抗を組み合わせた装置です。この装置は用途から考えて3つの分類のどれがよいか？つり合いの位置はドアが閉じられた位置とする。



減衰振動 臨界減衰 過減衰

強制振動と共振 p59

：一定の周期で変動する外力の作用による、外力と同じ周期での振動

：外力の振動数が、ばねや振り子の固有振動数とほぼ同じときに振幅が最大になる現象

ばねにつけたおもり、単振り子で実演

角振動数が ω の単振動を行う物体に周期的に変化する力 $F(t) = F_0 \cos \omega_f t = m f_0 \cos \omega_f t$ が作用すると
 ω_f : 外力の角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \text{弾性定数 ばねの場合はバネ定数}$$

$$\text{復元力} = kx = m\omega^2 x$$

$$\text{単振り子の場合: } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\text{復元力} = mg\theta = mg(x/L) = m\omega^2 x$$

$$\text{ばねも振り子も復元力 は } m\omega^2 x$$

$$\begin{aligned} \text{運動方程式: } ma &= -m\omega^2 x + m f_0 \cos \omega_f t \\ a &= -\omega^2 x + f_0 \cos \omega_f t \end{aligned}$$

$F_0 = m f_0$ と
おいたので
式が簡単になる

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_f t$$

授業では、この微分方程式が
解けることを要求しない。

$$\text{一般解: } x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_f^2} \cos \omega_f t$$

A と θ_0 は
任意定数

自由振動の項

外力がない
時の振動

強制振動の項

$\omega_f = \omega$ で無限大に。
実際には抵抗があるので
無限大にはならない

外力 (f_0) が 0 とき、第2項 $\rightarrow 0$ 。第1項だけ残る。(単振動)

A が 0 のとき、第1項 $\rightarrow 0 \rightarrow$ 第2項だけ残る。(安定した強制振動)

f_0 も A も 0 でないとき、第1項も第2項もあり、うなりを生ずる。

問題: $x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_f^2} \cos \omega_f t$ が $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_f t$ の解になっていることを確かめよ

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_f^2} (-\omega_f) \sin \omega_f t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$\omega^2 x =$$

$$\text{左辺} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x =$$

うなり(音叉)の実験

(注)強制振動とは関係ない

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \text{が大きくなる}$$

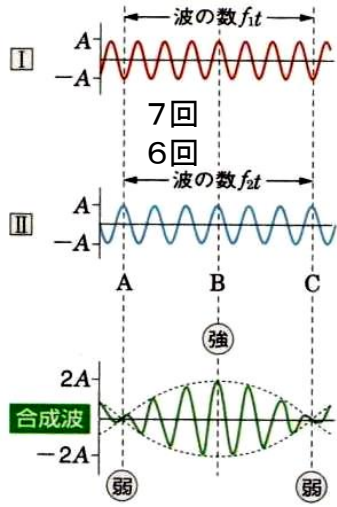
440 Hz

音叉を2個用意し、一方におもりおつける。→ 振動数が小さくなる(音が低くなる)

実験①: 片方ずつ鳴らす。音の高さの違いわかる?

実験②: 2つの音叉を同時にならす。うなりある?

問題: 2つの音叉の振動数の違いは?



速度に比例する抵抗がある場合

前頁の抵抗力のない場合より
現実的(実際には抵抗ある)

$$\text{運動方程式: } ma = F = -m\omega^2 x - 2m\gamma v + \begin{cases} F_0 \\ m f_0 \cos \omega_f t \end{cases}$$

復元力 抵抗力 周期的に変化する外力

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_f t$$

授業ではこの微分方程式が解けることを要求しない。一般解は以下のようになる。

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_f t - \phi) + Ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \theta_0)$$

Aと θ_0 は任意定数

外力の角振動数 ω_f での振動 時間の経過とともに 0 になる。

あまり重要でない。
時間が経つと無くなる項

$$\text{振幅 } x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \quad \sin \phi = \frac{2\gamma \omega_f}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

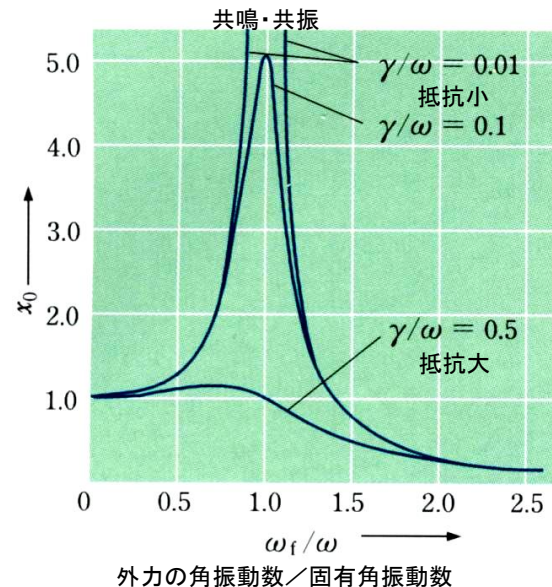
$$\cos \phi = \frac{\omega^2 - \omega_f^2}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

振幅 x_0 は $\omega_f = \omega$ で最大。
抵抗があるので無限大にはならない(右図参照)

共振(共鳴)の例①: タコマ橋の崩壊(動画参照)
橋の固有振動と風が橋を通り過ぎるときの渦の振動が一致

風洞実験(カルマン渦)(動画参照)

共振(共鳴)の例②: 声でワイングラスを割る(動画参照)



前頁の結果は抵抗が入っていないので現実的でない。
このページの上の結果は、抵抗が入っている、現実的。

ドナルドダック効果(ドナルドダックボイス現象)



← 変声カン:ヘリウム80%、酸素20%
(酸素が入っているので酸欠にならない。)
注意:ヘリウム100%でやってはいけません。

- ①肺の空気をできるだけ出す。
- ②鼻をつまんで、ガスを吸い込む。
- ③何か喋ってみる。

ギターの実験

問題①:弦を強くはじいたときと、弱くはじいたときで、音の高さは違うか？

(ヒント:ばねの振動も、振り子も、周期・振動数は、振幅によらない)

答: _____

問題②:ギターの同じ弦をはじく。張力 S の大きいとき(ピンと強く張ったとき)と、小さいときでは、どちらの音が高いか？

答:張力 S の _____ とき

問題③:指で弦を押さえることで、弦の長さ L を変えることができる。弦が長いときと短いときでは、どちらの音が高いか？

答:弦が _____ いとき

問題④:弦の張力と長さが同じとき、太い弦(単位長さあたりの質量(線密度 μ)が大きい)と、細い弦では、どちらの音が高いか？

答: _____ い弦

$$\text{弦の振動数 } f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad (\text{基本振動}) \quad \text{教科書p142}$$

ピアノ、ギター、バイオリン等の弦楽器の音の高さ(振動数)は

弦の張力、長さ、線密度(単位長さあたりの質量)で決まる。声帯は弦とは異なるが似たところもある。

ちなみにこれらの楽器はヘリウム中で演奏しても音はほとんど変わらない。

声帯は
筋肉で
調節可能

疑問:ヘリウムを吸っても声帯の張力、長さ、線密度は変わらないので、声帯の振動に大きな差はない。

ではなぜ声が大きく変わるのか？

次回解説します。

