

中間試験の範囲

教科書5章まで

ただし、万有引力による位置エネルギーを除く
(関連するケプラーの法則や、脱出速度も出ません。)

(注)重力による位置エネルギー $U = mgh$ は出ます。

プリントでは、今日の6ページまでのすべてが試験範囲です。
もし、6ページまで終わらなかったら、できなかった部分は試験範囲から外します。

Q&A

Q: ヘリウムガスで意識不明になったというニュースを思い出しました。

Q: (同上)何に気を付ける必要がありますか。

A: ヘリウムを含むガスを吸って、肺が膨らみ切ったところに、さらにスプレー缶から排出されるガスの圧力がかかり、肺胞が破裂することがあるようです。損傷を受けた肺胞周辺から血管へとガスが流入。その結果、脳空気塞栓症を発症し、意識障害を引き起こしたとみられています。

Q: ふうせんの中のヘリウムガスは吸ってはいけませんか。

A: 風船用のヘリウムガスは、酸素が入っていないので、酸欠の危険があります。

Q: 振り子時計の振り子の長さは 0.2483 m 程で決まりますよね。

A: 周期を 1 s しようとするそうなのですが、時計の針を正確に動かすだけなら、その後の歯車で調整できますので、振り子の周期はいくらでも問題ありません。

Q: 琴を演奏する際等、準備するときに調律していますが、調律する機械はどういう原理になっているのですか？

A: 専用の機械もありますが、スマホでもできます。原理はスマホのマイクを使って音を電気信号変えて、その周波数成分を調べます。



FFTすれば音の高さ(周波数)が分かる

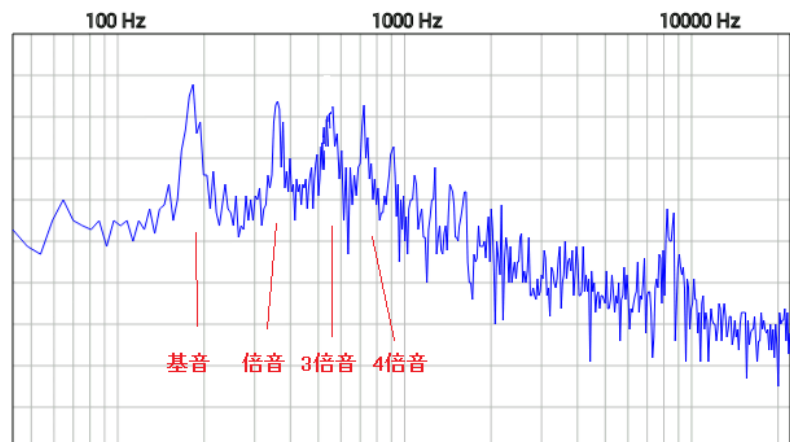
☐ 生波形(時間軸) ☒ FFT(周波数軸)

Record

Stop

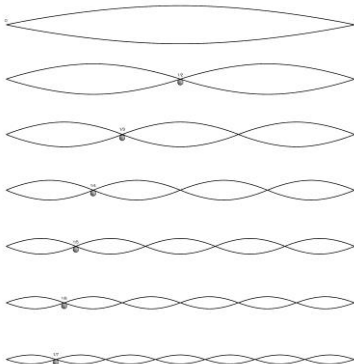
Play

Filter



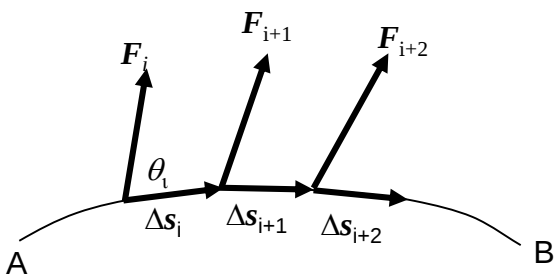
FFT: Fast Fourier Transform,
(高速フーリエ変換)

弦楽器から出ている音の周波数を
調べると、基音(基本振動)の他に
倍音、3倍音、4倍音も出ている。



力や移動方向が一定でない場合の仕事 (一定の場合は $W = F \cdot s$)

力や移動方向が一定でない場合も、左の図のように細かく分割すれば、その微小区間では、力や移動方向は一定。
i 番目の区間で力 F_i がする仕事 ΔW_i は、



$$\Delta W_i = F_i \cdot \Delta s_i$$

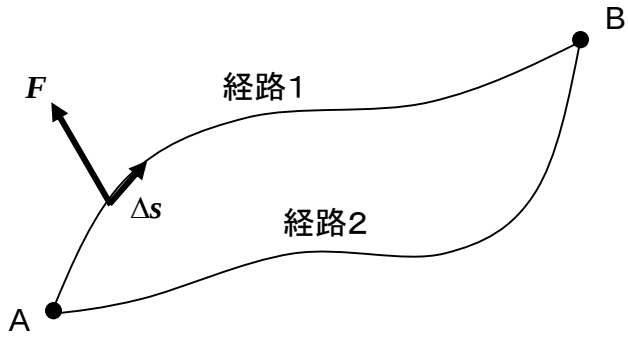
物体がAからBまで移動する間に力 F のする仕事 $W_{A \rightarrow B}$ は

$$W_{A \rightarrow B} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_i \cdot \Delta s_i = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F_t ds$$

F_t は F の
移動方向成分
 $F_t = F \cos \theta$

線積分
経路A→Bに沿っての積分
(曲線に沿った積分)

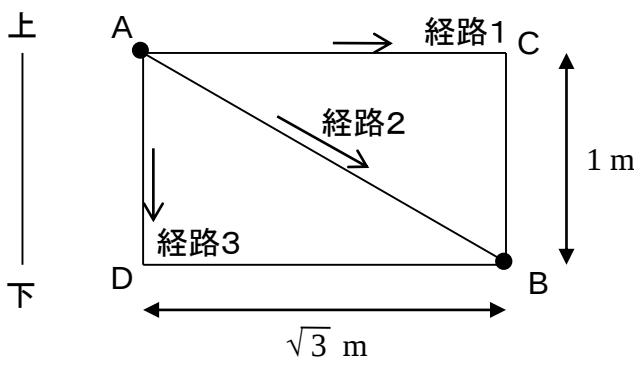
質点が任意の点Aを出発して任意の点Bに行く間に、
力の行う仕事が途中の経路によらず一定な力である。



保存力

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \text{ は経路によらず一定}$$

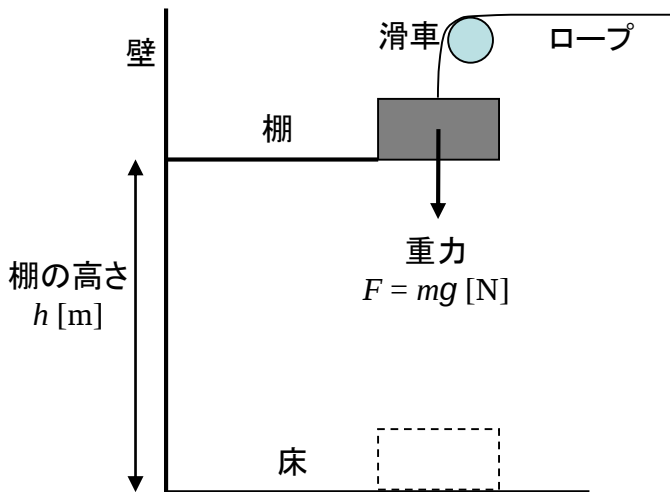
問題: 左下の図の3つの経路で、質量 4 kg の質点がAからBまで移動するとき、
各経路について重力のする仕事を求めよ。重力加速度は 10 m/s^2 とせよ。



重力は保存力である
質点がAからBに移動するとき、重力のする仕事は経路によらない。(上の経路以外の経路も)

重力による位置エネルギー(再考)

エネルギー：外部に対して行うことができる仕事量（単位：ジュール[J]）
（仕事をする能力）



左図のように m [kg] の物体にロープをつけると
物体は床まで移動する際に
ロープを mg [N] の力で
 h [m] 引っ張ることができる。

この時物体ができる仕事の量は

$$W = Fs \cos \theta = mgh \text{ [J]}$$

$$\cos \theta = 1$$

床から高さ h [m] にある m [kg] の物体は、
床に戻る際 mgh [J] の仕事を行うことができる

物体がロープを引く力の大きさ＝物体に働く重力の大きさ
物体が行った仕事＝重力が行った仕事



重力による位置エネルギー：基準点（上の例の場合は床の上）に戻るときに重力の行う仕事

（重力が行う仕事の分、物体は外部に対して仕事ができる。）

位置 r にある物体の重力による位置エネルギー $U(r)$ は、 $U(r) = \int_r^{r_0} \mathbf{F}_{\text{重力}} \cdot d\mathbf{s}$ （基準点は r_0 ）

（ $W_{r \rightarrow r_0} = \int_r^{r_0} \mathbf{F}_{\text{重力}} \cdot d\mathbf{s}$ が経路によらず、位置 r だけで決まるから位置エネルギーが定義できる）

保存力

（どの経路を通ってもできる仕事は同じ）

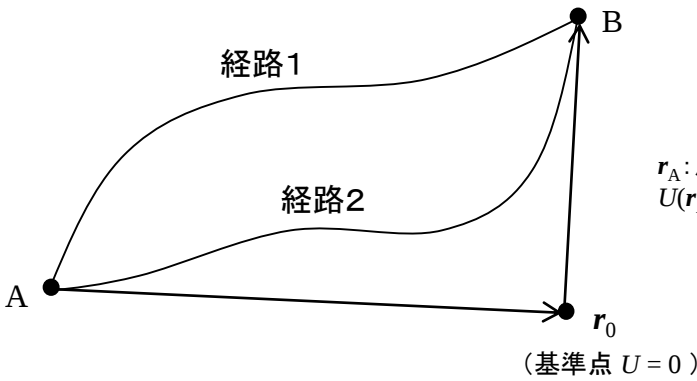
保存力 $F_{\text{保}}$ の位置エネルギー： $U(r) = W_{r \rightarrow r_0} = \int_r^{r_0} \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{s}$

意味：保存力 $F_{\text{保}}$ の位置エネルギーは、 に戻るときに、 がする仕事
（その分外部に仕事を行うことができる。）

保存力であることを
強調するために $F_{\text{保}}$ と
書いたが単に F でよい。

基準点以外のAからBに移動する場合に保存力 $F_{\text{保}}$ がする仕事

保存力だから、どのような経路を通っても値は一定



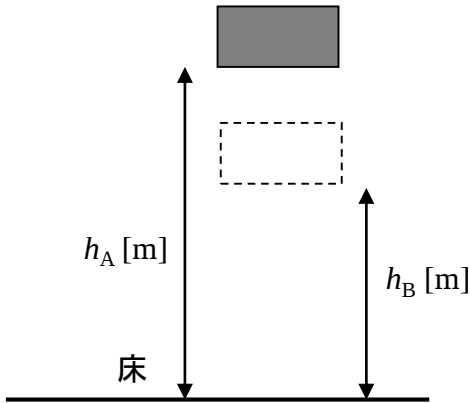
r_A : 点Aの位置ベクトル
 $U(r_A)$: 点Aにおける
 位置エネルギー

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^{\text{保}} &= \int_A^B F_{\text{保}} \cdot ds = \int_A^{r_0} F_{\text{保}} \cdot ds + \int_{r_0}^B F_{\text{保}} \cdot ds \\ &= \int_A^{r_0} F_{\text{保}} \cdot ds - \int_B^{r_0} F_{\text{保}} \cdot ds \\ &= U(r_A) - U(r_B) \end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{保}} = U(r_A) - U(r_B)$$

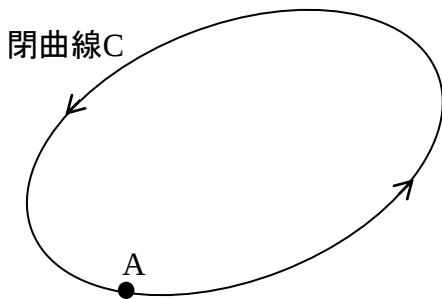
保存力のした仕事 = 位置エネルギーの減少分
 (位置エネルギーの減少分だけ外部に仕事ができる)
 仕事をした分、位置エネルギーが減った
 $\parallel$
 仕事をする能力

問題: 質量 m の物体が高さ h_A から 高さ h_B に移動するとき、
 $W_{A \rightarrow B}^{\text{保}} = U(r_A) - U(r_B)$ が成り立っていることを確かめよ。



$$W_{A \rightarrow B}^{\text{保}} =$$

$$U(r_A) - U(r_B) =$$



閉曲線に沿って1周したときに保存力がする仕事

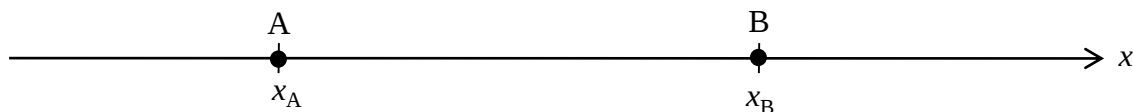
$$\oint_C F(r) \cdot ds = W_{A \rightarrow A} = U(r_A) - U(r_A) = 0$$

↑ 閉曲線Cを1周する積分を表す記号

任意の閉曲線に対して上の式が成り立つことは
 F が保存力である必要十分条件でもある。

1次元問題での位置エネルギー

x 軸に平行な力 $F(\mathbf{r}) = [F(x), 0, 0]$ の力を受け、 x 軸に沿って運動する質点の場合
(力が位置で決まっている場合)



質点が A から B まで移動するとき、力 $F(\mathbf{r})$ のする仕事 $W_{A \leftarrow B}$ は

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{x_A}^{x_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx$$

$(F(x), 0, 0) \cdot (dx, 0, 0) = F(x)dx$

経路を x 軸上にとると $d\mathbf{s} = (dx, 0, 0)$ なので、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = F(x)dx$

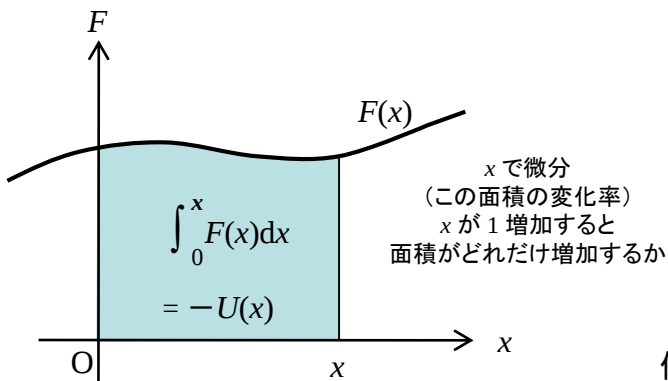
この定積分は始点 x_A と終点 x_B だけで決まるので、力 $F(\mathbf{r}) = [F(x), 0, 0]$ は保存力
(経路は1つしかない、経路によらない)

保存力 $F_{\text{保}}$ の位置エネルギー: $U(\mathbf{r}) = W_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0}^{\text{保}} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{s}$ なので

基準点を原点 $x = 0$ に選ぶと $U(x) = \int_x^0 F(x) dx = - \int_0^x F(x) dx$

x で微分すると $F(x)$

位置エネルギーと
保存力の関係
(積分形)



x で微分すると $\frac{dU}{dx} = -F(x)$

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}$$

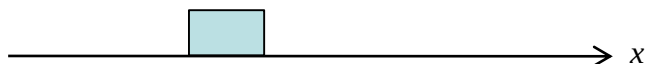
位置エネルギーと
保存力の関係
微分形

保存力 $F(x)$ は位置エネルギー $U(x)$ から導ける

保存力 $F(x)$ は、位置エネルギー $U(x)$ の傾き
に - をつけたもの

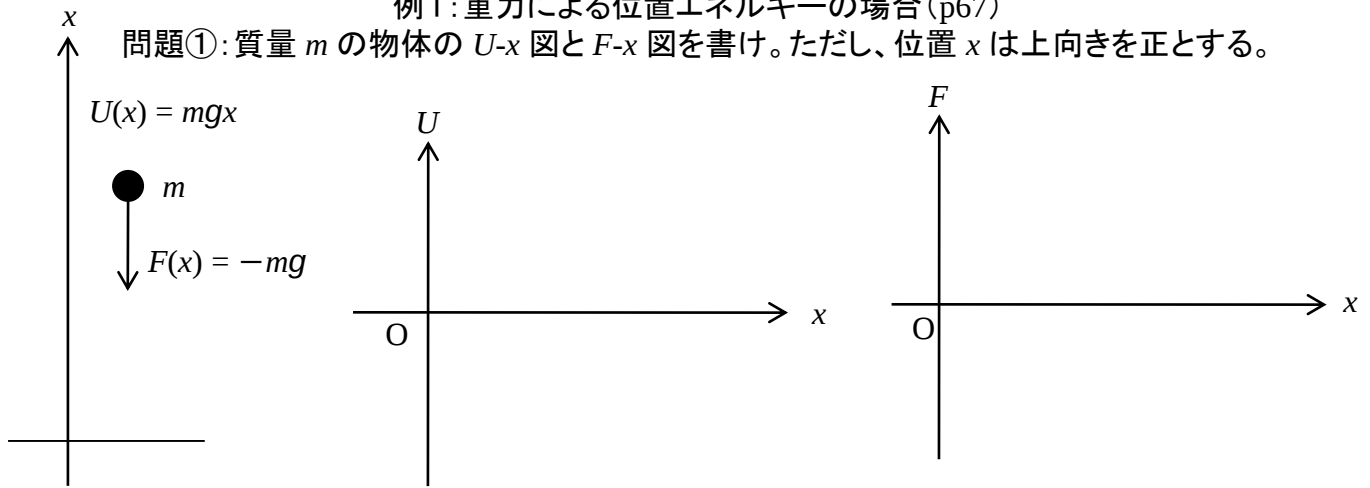
問題: 摩擦力は $F(\mathbf{r}) = [F(x), 0, 0]$ のように表せない。理由を説明せよ。

(摩擦力は保存力ではない。→ 位置エネルギーは定義できない)



例1: 重力による位置エネルギーの場合 (p67)

問題①: 質量 m の物体の U - x 図と F - x 図を書け。ただし、位置 x は上向きを正とする。



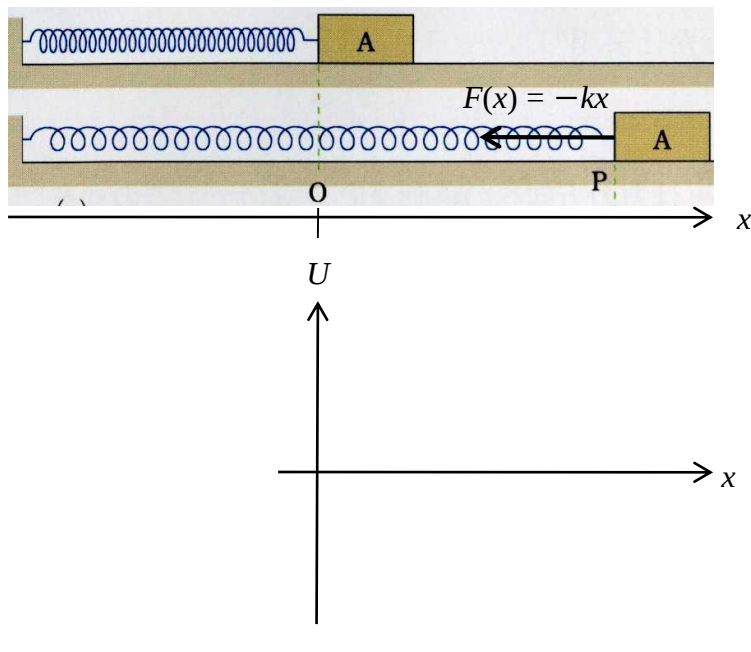
問題②: 位置エネルギー $U(x)$ より重力 $F(x)$ を求めよ。
また、重力 $F(x)$ より 位置エネルギー $U(x)$ を求めよ。
ただし、位置エネルギーの基準点は原点 O とする。

保存力 $F(x)$ は、位置エネルギー $U(x)$ の傾きに $-$ をつけたもの

別の言い方をすると

保存力の向き: 位置エネルギーが なる向き、保存力の大きさ: 1 m あたりの U の変化量の絶対値

例2: ばねの弾力による位置エネルギーの場合 (p71)



問題①: ばねにつながれた物体 A の
 U - x 図と F - x 図を書け

問題②: 位置エネルギー $U(x)$ より、ばねの弾力 $F(x)$ を求めよ。
また、ばねの弾力 $F(x)$ より 位置エネルギー $U(x)$ を求めよ。
ただし、位置エネルギーの基準点は原点 O とする。

ドナルドダック効果解説①

シャボン玉の実験

実験①ふつうにシャボン玉をとばす。

実験②ヘリウムを吸ってシャボン玉をとばす。

解説

気体はどんな気体でも、同じ体積中の分子数は同じ(アボガドロの法則)
標準状態で 1 mol は 22.4 リットル

空気の主成分の窒素(原子番号 7) N_2 の分子量は 28, ヘリウム(原子番号 2) He の原子量は 4
窒素は 1 mol で 28 g、ヘリウムは 1 mol で 4 g
ヘリウムガスの方が軽いので空気中で浮く。

瓶の実験

実験①空の瓶の口に息を吹きかけ鳴らしてみる。

実験・問題②瓶に水を入れると音は高くなる？それとも低くなる？ 答: 高くなる。

気柱の実験

実験①長さの違う筒をたたいて出る音の高さを比べる。

実験②長さの違う筒を耳にあててみる。ゴーっという音が聞こえるがその音の高さを比べてみる。

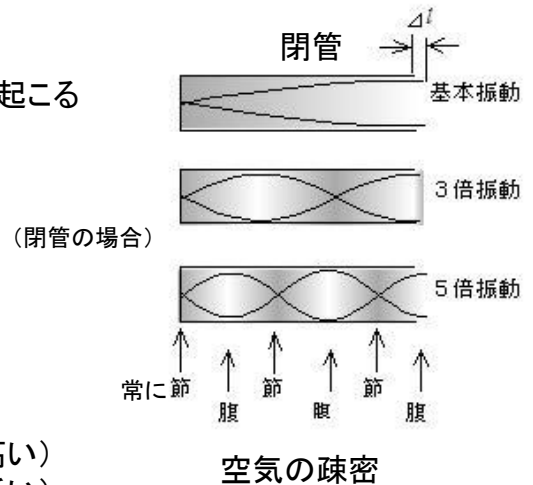
(外力) (外力) (外力)
外部からやってくる音や、たたいたり、息を吹きかけた時に起こる
振動は様々な振動数を含んでいる。
(様々な振動数を持つ外力による強制振動)

その中で気柱の固有振動である
基本振動や3・5・・・倍振動の音だけが共鳴する。

基本振動の振動数 $f = \frac{v}{4l}$ v : 音速, l : 筒の長さ

筒の長さ l が小さいと波長が短く、振動数は大きい(音が高い)
筒の長さ l が大きいと波長が長く、振動数は小さい(音が低い)

水を入れる → l が小さくなる → 音が高くなる。



開管の場合はどちらの端も腹