

Q: 空気より重いガスなら声は低くなるのですか。

A: はい。そのとおりです(動画参照)。この動画で使われている気体は六フッ化硫黄(SF_6)分子量は 146 で窒素分子 28 の約 5 倍。無色、無臭、無毒の気体です。

Q: 貝を耳にあてると海の音が聞こえてくるというのはうそだったのだと知って悲しくなりました。

A: うそというわけではないと思いますが、気柱を耳にあてたときに聞こえるゴーっという音と同種のものだと思います。それが、海の音に似ているということでしょうか。

Q: 水を入れたグラスのふちをなぞって音楽を奏でるやつがありますが、ビンの中に水をいれて吹くのと似たしくみですか？

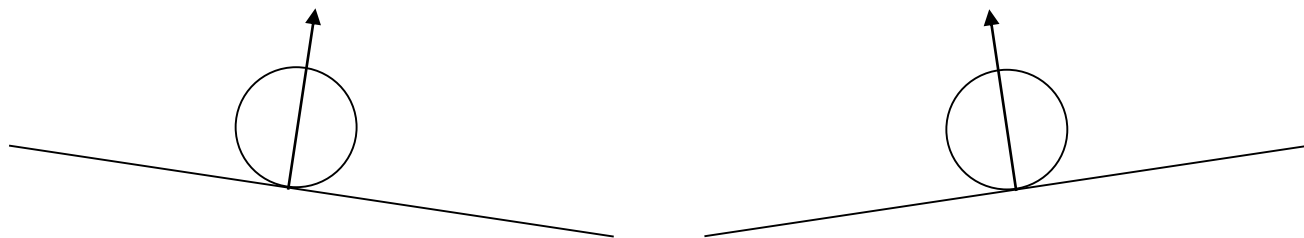
A: グラスハープというらしいですね(動画参照)。瓶の口に息を吹きかけたり、グラスのへりをこすったりすると、気流の乱れ(渦)や、摩擦による振動が様々な振動数の音を発生します。これが様々な振動数の外力になります。これらのうち、固有振動数と等しいものだけが、共鳴・共振を起こして強調されていると考えられます。この2つは、外力の発生のさせ方が違うだけで、その後の共鳴・共振は同種のものだと思います。

Q: 念力って信じますか？

A: 信じません。物体に作用する力は、その物体に触れているものから作用します。触れずに作用する力は、重力、電気力、磁気力のみです。念力で、重力や電気力、磁気力が発生するとは思えませんし、仮に発生するとしたら、簡単に測定・実証できます。

自転車を漕がずに加速する方法

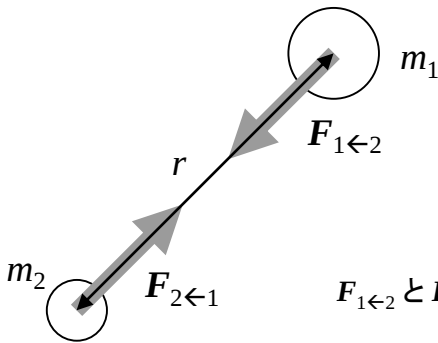
通常、斜面上の物体の運動を考えるときには、斜面にそった軸で考えますが、今回は水平な軸で考えます。自転車(乗り手も含む)には2つの力しか作用していません。一つは重力で、もう一つは路面からの垂直抗力です。重力は制御できませんし、水平な成分もないので、水平方向の加速には全く寄与しません。路面からの垂直抗力は水平な成分もあるので、これで水平方向の加速・減速が起こります。上り坂では、垂直抗力は減速するの方向に作用し、下り坂では加速する方向に作用します。路面が自転車を押す垂直抗力は、自転車が路面を押す垂直抗力と作用・反作用の関係にあります。よって、自転車が路面を強く押せば、路面からの垂直抗力も大きくなります。加速するには、下り坂で足に力を込め(足を伸ばそうとして)、路面をグッと押し、上り坂で足の力を緩め(足を曲げ)路面を押さないようにすれば、自転車は加速します。



(参考)通常は、斜面に沿った軸を考え、重力の斜面に平行な成分で加速すると考えます。この場合、垂直抗力は斜面に垂直なので、加速に寄与しません。しかし、「自転車を漕がずに加速する方法」の説明では、水平な軸を考えた方が説明しやすいので、そのようにしました。

万有引力の法則(復習)

2物体の間に働く万有引力の大きさ F は、
2物体の質量 m_1 と m_2 の積 $m_1 m_2$ に比例し、2物体の距離 r の2乗に反比例する。



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

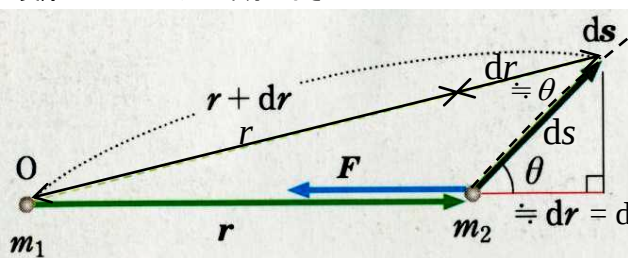
G (重力定数) = $6.672 \times 10^{-11} [\text{m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2]$

$F_{1 \leftarrow 2}$ と $F_{2 \leftarrow 1}$ は大きさが同じで互いに逆向きになっており作用・反作用の関係にある

基準点は無限遠 $\rightarrow$

万有引力による位置エネルギー (p68)

実際は ds は r に比べて十分に小さい



質量 m_2 の質点に作用する万有引力(ベクトル表現)

$$F(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad -\frac{\mathbf{r}}{r} : \text{万有引力の向きの単位ベクトル (大きさが1のベクトル)}$$

(ベクトル表示)

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = r ds \cos \theta \doteq r dr$$

質量 m_1 の物体を固定した状態で、質量 m_2 の物体をゆっくりと引き離し、距離を無限大にする場合、

万有引力のする仕事は $W_{r \rightarrow \infty} = \int_r^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^{\infty} -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{s} = - \int_r^{\infty} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G \frac{m_1 m_2}{r} \Big|_r^{\infty} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

上記の式は、経路によらず成り立つので、万有引力も保存力である。

万有引力の位置エネルギーの基準点を2物体の距離が無限大の場合とすると

万有引力の位置エネルギーは

$$U^{\text{万有}}(r) = W_{r \rightarrow \infty} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

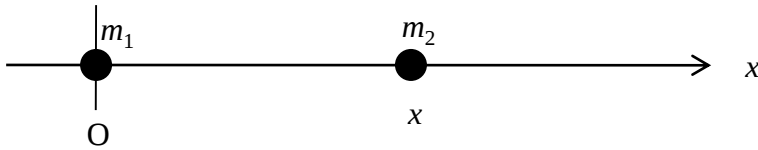
$r = 0$ を基準点にとると発散
 F も ∞
また、実際には、
大きさがあるので
 $r = 0$ にはできない。

(位置エネルギーとは、基準点に戻るときに、保存力がする仕事)

その分、外部に仕事をすることができる

万有引力の場合、位置エネルギーは基準点が最大

質量 m_1 の物体と質量 m_2 の物体が x 軸上にあり(1次元問題)、
 質量 m_1 の物体は原点に固定されている。質量 m_2 の物体の位置を x としたとき、
 万有引力による位置エネルギー $U(x)$ は右下の式のようにになる。



$$U(x) = -G \frac{m_1 m_2}{x}$$

問題: 質量 m_2 の物体に作用する万有引力の向きと大きさを位置エネルギーより求めよ。
 向きは上の図に矢印で書き込めよ。

p69 参考: $F(x) = - \frac{dU}{dx}$ を3次元に拡張

ある保存力 $F(\mathbf{r})$ による位置エネルギーが $U(\mathbf{r})$ であるとき、 $F(\mathbf{r})$ の各軸の成分は

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}$$

偏微分 $\frac{\partial U}{\partial x}$: y と z を一定に保って x で微分

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}$$

ナブラというベクトルの微分演算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を使うと

gradient というのは、
 勾配、傾斜、傾きの意

グラディエント・ユーと読む

$$F(\mathbf{r}) = - \nabla U(\mathbf{r}) = - (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$$

スカラーである位置エネルギー U より
 ベクトルである保存力 F が求められる

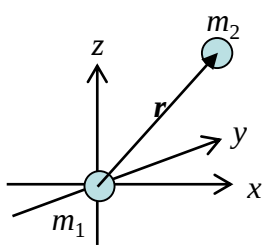
問題: 鉛直上向きを z 軸のプラスの向きとすると、質量 m の物体の重力による位置エネルギーは $U = mgz$ である(基準点は原点)。このとき重力 F を成分で表せ。

2次元、3次元に拡張しても、保存力 F は、位置エネルギー U の傾きに-をつけたもの
 位置エネルギーの低い方に向って力が働き、その力の大きさは位置エネルギーの傾きに比例する。

∇U は位置エネルギー U の3次元の傾きを表す。gradient というのは、勾配、傾斜、傾きの意

$F(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ を用いて万有引力による位置エネルギー $U(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ より万有引力 $F(\mathbf{r})$ を求める。

問題: 質量 m_1 の質点が原点に固定されている。位置 $\mathbf{r}$ にある質量 m_2 の質点に働く万有引力 $F(\mathbf{r})$ を求めよ。



$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} =$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (x, y, z) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(万有引力のベクトル表現)

各点に
1つの値
↓

各点に
3つの値
↓

スカラーである $U(\mathbf{r})$ より、ベクトルである $F(\mathbf{r})$ が求められるのは、情報量の点から少し不思議な気がしますね。

↑
完全に自由に
値を決めることができる。

↑
スカラーの勾配である
という制限がある。
自由に値を
決めることはできない。

例題2 脱出速度 p70

地球表面にある大砲から砲弾を発射して地球の重力圏から脱出させて無限の遠方まで到達させたい。

(1) 地球表面における砲弾(質量 m) の万有引力による位置エネルギーはいくらか？

ただし、地球の質量は M_E 、地球の半径は R_E とし、地球の全質量は中心にあるとしてよい。

E はEarth の E

万有引力による
位置エネルギーの
基準点は無限遠

(2) 地球表面における砲弾の万有引力による位置エネルギーを重力加速度 g を用いて表せ (M_E を消去)。

上のままでもよいが、もっと身近な定数で表現

(3) 砲弾の初速度を v_0 とすると、発射直後の砲弾の力学的エネルギーはいくらか？

第2宇宙速度

(4) 地球の重力圏から脱出して無限の遠方まで到達させるための初速 v_0 の最小値(脱出速度)を計算せよ。空気抵抗は無視し、力学的エネルギーは保存するとせよ。

自転, 公転, 太陽の重力は無視し、地球の半径は 6.4×10^3 km、重力加速度は 10 m/s^2 とせよ。

地球の質量 M_E を知らなくても計算できることに注意

M_E を用いる表現では

$$-G \frac{mM_E}{R_E} + \frac{1}{2} m v_0^2 > 0$$

運動エネルギー

重力引力

ポテンシャルエネルギー

$$\frac{1}{2} m v_0^2 > G \frac{mM_E}{R_E}$$

$$v_0^2 > \frac{2GM_E}{R_E}$$

$$\text{脱出速度: } \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

第2宇宙速度

問題: 太陽表面からの脱出速度を計算せよ。太陽の質量 M は 2×10^{30} kg (地球の約30万倍)、半径は 70万km (地球の約100倍)。 G は 6.7×10^{-11} [$\text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$] とせよ。

相対性理論によると光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s 以上の運動は不可能。

脱出速度が光速 c を超えるとブラックホールとなる。(M が大きく、 R が小さいと脱出速度が大きくなる。)

例: 中性子星は、質量は太陽程度、半径は10 km 程度、脱出速度は光速の1/3 程度、密度は約10億トン/cm³

(参考) 第1宇宙速度: 地表面すれすれの衛星の速さ。問題: 第1宇宙速度を求めよ。(空気抵抗は考えない)

g は 9.8 m/s^2 とせよ。

(参考) ISS (国際宇宙ステーション) の軌道は地上 400 km です。ISSの速さを求めよ。

必要なら、前頁とこの頁の値を用いてよい。

(地球の質量 M_E の値が書いてない意地悪な問題ですが出せます。)

答えは第一宇宙速度より小さい。力学的エネルギーは地上すれすれの場合より大きい。

6章 質点の角運動量と回転運動の法則

力 F のモーメント (p77)

力のモーメント:新しい物理量

← 重い人は、支点に近いところに座り、
軽い人は、支点から遠いところに座るとつり合う

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

シーソーを回転させる能力: Fl に比例する

点Oのまわりの力の (トルク) $N = Fl$: 物体を支点(点O)のまわりに回転させる能力

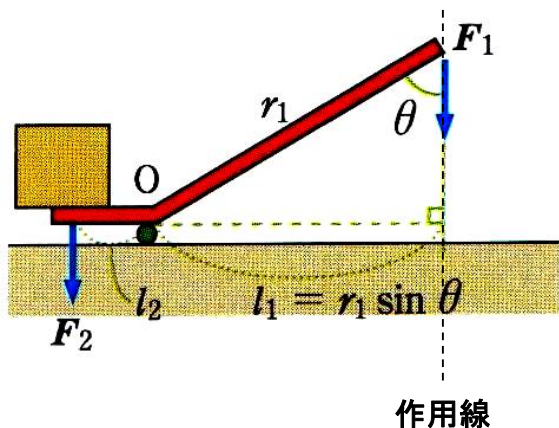
単位: $\text{N} \cdot \text{m}$ 回転の向きの違いは、反時計回りを正、時計回りを負 として区別する。 等速円運動の θ と同じ

問題: 左上のシーソーの図で、点Oのまわりの力 F_1 と力 F_2 のモーメントを求めよ。

力 F_1 のモーメント: _____ 力 F_2 のモーメント: _____

力の向きが、回転の向きと異なる場合

(左下の図で θ が 90° でない場合)



力のモーメント

「力の大きさ F 」×「支点Oから力の作用線までの距離 l 」

問題: 左の図で、点Oのまわりの力 F_1 のモーメントと力 F_2 のモーメントはいくらか?

力 F_1 のモーメント:

力 F_2 のモーメント:

[問題] 上の図は、「てこ」の原理を示している。「てこ」とは、小さい力で大きな力を得るための道具である。上の図で $l_2 = 10 \text{ cm}$ 、 $r_1 = 1 \text{ m}$ 、 $\theta = 60^\circ$ の時、力 F_2 の大きさは力 F_1 の大きさの何倍か? てこの質量は無視してよい。

ヒント: ゆっくり持ち上げるとき、 F_1 と F_2 の力のモーメントはつり合っており $N = 0$ としてよい。

「てこ」で、10倍の力を得たとしても、移動距離は1/10しかないことに注意: 仕事 $W = F \cdot s$ は同じ。問題: てこの応用例は?

ドナルドダック効果解説②

笛(リコーダー)の実験

実験: 同じ指の状態で、ヘリウムを吸って笛を吹くと音はどうか? 高くなる 変わらない 低くなる

「気体の音速」と「気体分子(原子)の速度」

$$\text{気体分子の平均運動エネルギー} \quad \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (k_B: \text{ボルツマン定数}, T: \text{絶対温度})$$

気体の種類によらない。ヘリウムも窒素も

ヘリウムのように m が小さい $\rightarrow$ 分子速度 v の絶対値が大きい(速い)

空気中の窒素分子や酸素分子の平均の速さ ≈ 500 [m/s] (273 K = 0°C)

空気の音速 ≈ 330 [m/s] (273K = 0°C)

(教科書 p143)

気体分子の速度は、音速と同程度である。(難しいので説明省略)

分子速度が空気より大きいヘリウム中の音速は、空気中の音速より大きい

気柱の共鳴振動数 f は音速 v に比例するので、
音速の大きいヘリウム中では、共鳴振動数 f が大きくなる。(音が高くなる)

$$\text{閉管の基本振動の振動数} \quad f = \frac{v}{4l} \quad v: \text{音速}, l: \text{筒の長さ}$$

人の声

人の声も、瓶やリコーダーと同じく、共鳴が起こっている。

声帯では様々な振動数の音が発生している。

ヘリウム中では共鳴する振動数 f が
大きくなることで、声が高くなる。

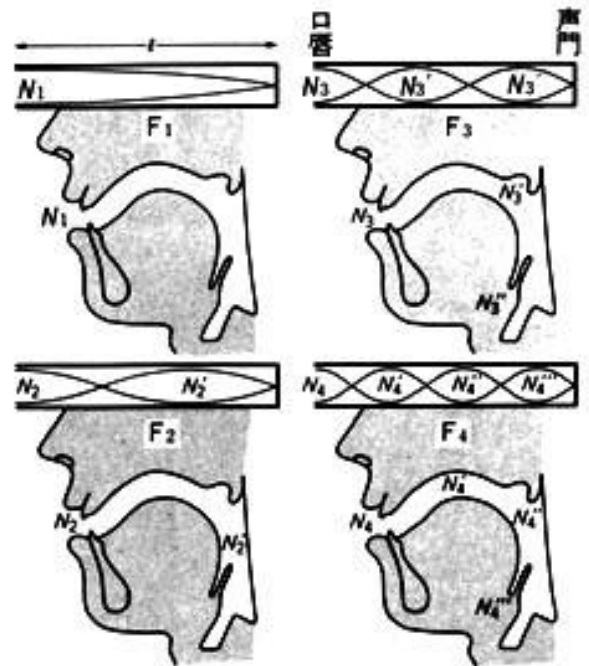
声帯自体の振動は、ヘリウム中でも大差ない。

リコーダーも声帯にあたるラビュームの部分で

発生している音は様々な振動数を含む。

指で穴をふさぐことで管の長さ l を変えて
共鳴する振動数 f を変えている。

ラビューム



問題: ヘリウムで音が変わる楽器にはどのような楽器があるか? (笛は変わる他には)