

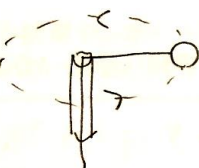
Q & A

Q: $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0) \rightarrow \mathbf{N} = (0, 0, xF_y - yF_x)$ の過程を教えてください。(2人)

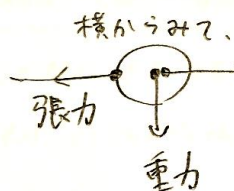
A: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$ の定義を使っただけです。 $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Q: 偶力によって回転させるとき、力の大きさによってどれだけ回転させるかを調節することは、摩擦がないときでもできますか？

A: できます。力(力のモーメント)と、力(力のモーメント)が作用する時間によって調節できます。直線運動での対応で考えると、摩擦のない水平面上に置いた物体の速度は、物体に作用する力の大きさと、力が作用する時間で調節できます。

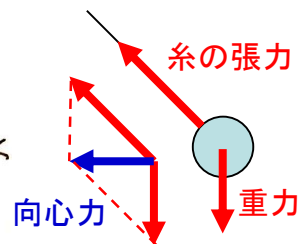


←この図のとき、球にはたらく力が不思議です。



横からみて、
張力は糸の向きにはたらくはず。重力は絶対下向き。
遠心力の向きが違う？
⇒ 釣り合っていないようにみえる(鉛直方向)

張力は糸の向きにはたらくはず。重力は絶対下向き。
遠心力の向きが違う？



A: 教科書の問題文には「重力を無視する」と書いてあります。実際には図のように糸は水平にはなりません。糸の張力と重力の合力が向心力となって円運動します。

Q: 実家の猫はよくキャットタワーで寝転がったり、のびをしたりしてはみだして、よく背中から落ちてそのまま背中をぶつけていました。

A: 猫もいろいろですね。うちには猫が2匹いますが、運動能力はかなり違います。

Q: 「犬ひねり」はできないのでしょうか？(2人)猫以外の動物もできますか？

A: どうでしょう？私もよくわかりません。

Q: むにむにさんの物理エンジン(You Tube)がわかりやすいです。

A: ガンダムのやつかな。見たことがあります。

Q: 熱力学は力学の中に入りますか？

A: 入りませんが、レポートのテーマとしてOKですよ。

Q: レポートのテーマが思いつかないのですが、ブランコ以外だとどのようなものがありますか？

A: 何でもよいのです。このQ&Aの関連では、ネットで猫以外の動物が「猫ひねり」をするか調べてみました。とか

成分にわけると $M \frac{d^2X}{dt^2} = F_x$, $M \frac{d^2Y}{dt^2} = F_y$, $M \frac{d^2Z}{dt^2} = F_z$

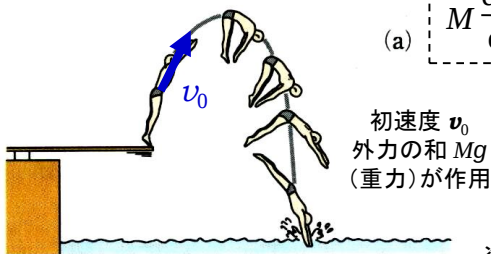
重心の位置ベクトル $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$
 質点系に作用する外力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$

3個以上の質点の場合も外力の和 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$ とすると

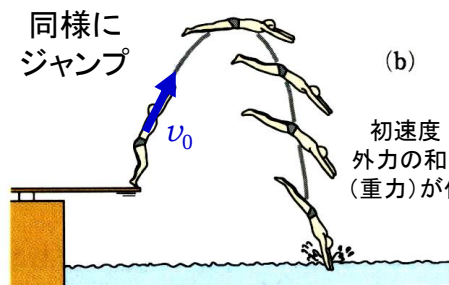
$$(a) \quad M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = M\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (\text{質点系の重心の運動方程式})$$

$\mathbf{A}$: 重心の加速度

(質点の場合 $ma = F$ と同じ)



初速度 $\mathbf{v}_0$
 外力の和 $M\mathbf{g}$
 (重力) が作用



初速度 $\mathbf{v}_0$
 外力の和 $M\mathbf{g}$
 (重力) が作用

姿勢の変更は
 内力で
 される

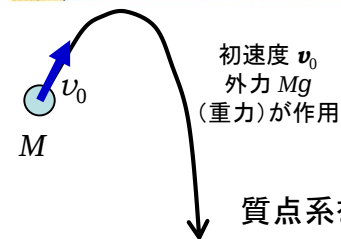
人は剛体ではないが重心の性質は同様に適用できる

(a), (b) は質量も外力も同じなので
 飛び込む人の姿勢によらず、重心の軌道は全く同じ

同じ質量 M の質点も同じ初速度 $\mathbf{v}_0$ で投射すると
 (a), (b) の重心と同一の軌道(放物線)を描いて落下する

質点系の重心は質量 M の質点が外力 $\mathbf{F}$ の
 作用を受けている場合と同一の運動を行う。

重心の性質②



初速度 $\mathbf{v}_0$
 外力 $M\mathbf{g}$
 (重力) が作用

質点系の運動量 p86

質点系を構成する各質点の運動量 $\mathbf{p}_i$ の和を質点系の全運動量 $\mathbf{P}$ という

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \dots$$

質点系に関する
 物理量は太文字

重心の位置 $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \dots}{M}$ を時間 t で微分すると重心の速度 $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \dots}{M}$$

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \dots = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}$$

質点の場合と同じ ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$)

「質点系の全運動量」= 「質点系の全質量」× 「重心速度」

$\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ を t で微分すると

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{V}) = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} = \mathbf{F}$$

質点の場合と同じ

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$$

(重心の運動の法則、質点の場合と同じ)

質点系の運動量保存則

(質点の場合と同じ)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad \mathbf{F} = 0 \text{ の場合 (質点系に外力が作用しない場合)}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{P} = M\mathbf{V} = \text{一定}$$

外力が質点系に作用しなければ、重心は等速直線運動を続ける。(質点系の全運動量は保存する。)
作用してもその合力が0ならば、(静止していれば静止し続ける)

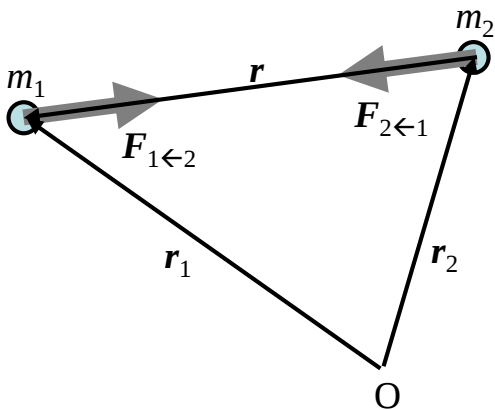
問題: 毛利さんのビデオを見て、剛体の重心がどこかを答えよ。

問題: 無重力状態で静止している質量 1 t (燃料を含む) のロケットが、燃料を 10 kg 使用して加速した。
噴射されたガス (10 kg) の速度を 4000 m/s としたとき、噴射後のロケットの速度を求めよ。

内力で噴射

ヒント: ロケットをロケット本体と噴射ガスの質点系と考える。

2体問題(2質点系) p88



外力は作用せず、内力で作用し合っている2質点系の場合、
2つの質点の運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{1 \leftarrow 2}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{2 \leftarrow 1}$$

第1式を m_1 で割り、第2式を m_2 で割る

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2}}{m_1} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1}}{m_2}$$

第1式から第2式を引く

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} \quad (\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1}) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} \end{aligned}$$

相対位置ベクトル $r = r_1 - r_2$ の運動方程式として

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{1 \leftarrow 2}$$

内力

$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

(相対位置を用いた運動方程式における質量)

$m_1 \gg m_2$ または $m_1 \ll m_2$ の場合: 換算質量 $\simeq$ 小さい方の質量

$m_1 = m_2$ の場合: 換算質量 $= m_1/2 = m_2/2$
(必ず、小さい方の質量より小さい。)

適した例

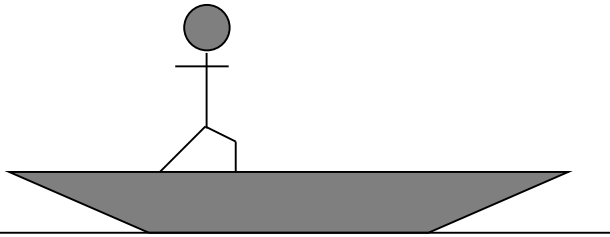
- ① 宇宙空間に2物体だけあるとき
- ② 2物体以外があまり重要でないとき
(相対位置や相対速度が重要なとき)

換算質量の例

換算質量のイメージ

水面に浮かんだ船や丸太の上で静止した状態から歩き出すとき、地面を歩く時より簡単に加速できる。
その時の感覚は、自分の質量が小さくなったよう。
このときの質量が換算質量。

人体に働く重力の大きさは変わらない。
加速のしやすさから感じる質量のこと。



例えば、人間の質量が 50 kg、船の質量が 200 kg とする。

人間が船の上で静止した状態から、船に対して 5 m/s まで加速したとき

この時、船は逆方向に 1 m/s で動きだす(地球に対する人間の速度は、4 m/s)。

さきほどのロケットの問題と同じで全運動量が保存する。(船が水中を進む際の抵抗は無視)

船が逆方向に進むので、簡単に(船に対して)加速できる。

問題①: 上の例の場合、換算質量はいくらか？

換算質量: _____ kg, 実際の質量より _____ kg 軽い

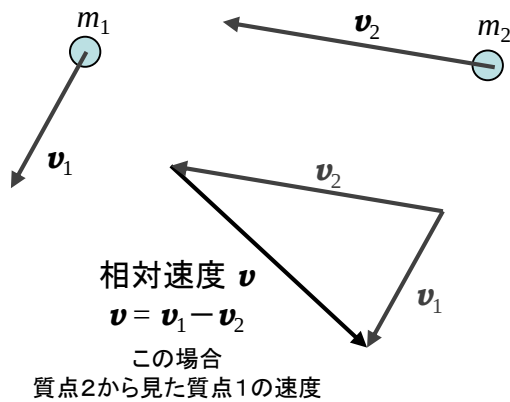
問題②: 質量が 100 t の大型の船の場合、換算質量はいくらか？

換算質量: _____ kg

上の問題の例のように一方の質量が他方の質量より
はるかに大きい場合、換算質量 m は、小さい方の質量にほぼ等しい

大型船で運動するときの感覚は、地上での運動と大差ない。(船が大きいので、人間の動きの反動で船が動くことがないから)

2体問題(2質点系)の運動エネルギー



質点系の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

それぞれの運動エネルギーの和

重心の運動エネルギー

相対運動の運動エネルギー

換算質量

相対速度

2乗すれば、どちらから見ても同じ値(例: 右の運動エネルギー)

問題: 右上の式において、右辺が左辺となることを確かめよ。穴埋めの部分は $m_1, m_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を用いて書け。

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 =$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} (|m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2|^2 + m_1 m_2 |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|^2)$$

$$v^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$(m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2) \cdot (m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2) + m_1 m_2 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$$

$$= (m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) + m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)$$

$$= m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)$$

$$= m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2$$

$$= m_1(m_1 + m_2) v_1^2 + m_2(m_1 + m_2) v_2^2$$

$$= (m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \text{左辺}$$

(3個以上)

一般の質点系(2個の場合も含む)の運動エネルギー

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}|^2$$

重心に対する速度

それぞれの質点の運動エネルギーの和

重心の運動エネルギー

相対運動の運動エネルギー

すべての質点を $\boldsymbol{V}$ まで加速するのに必要なエネルギー

重心の静止している系(重心系)でそれぞれの点を $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$ まで加速するのに必要なエネルギー
 そうすると各質点の速度は、 $\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{v}_i$ になる。

ペットボトルロケット

原理は、3ページの問題参照。運動量保存則で説明できる。

後方に水・空気を押し出す反動で前に進む。

基本原理は、本物のロケットと同じ。膨らませた風船が飛ぶのも同じ(実験参照)。



飛ばし方

(1)本来は、ペットボトルの中に4分の1ほど、水を入れておくのだが、教室の中が水びたしになるので、今日は空気のみで実験する。

(2)空気入れでペットボトルの内部に空気を注入する。ペットボトルは炭酸飲料用のペットボトルなので、少々圧力をかけても大丈夫。40回くらいポンピングできるが、飛びすぎるので今日は20回くらいにしておく。

(3)発射台の留め金はずすと、発射する。

水を入れた場合はビデオで確認

問題: 水をいれるとよく飛ぶのはなぜか？

同じ体積のものを、同じ速度で噴射できるなら、推進力は噴射物の



に比例する。

(実際には水の噴射速度は空気の噴射速度より遅い。)

水: 1 g/cm^3
空気: 0.0013 g/cm^3

飛行機のジェットエンジンは宇宙でも使えるか？ YES NO

電動のプロペラ機は宇宙でも飛ぶ(推進力がある)か？ YES NO

空気で膨らませた風船は宇宙でも飛ぶ(推進力がある)か？ YES NO

ペットボトルロケットは宇宙でも飛ぶ(推進力がある)か？ YES NO