

Q: キュリー温度以上にしてネオジム磁石の磁化を失わせた後、他の磁石を使って磁化させてもレンチのように弱い残留磁化しかもつことができないのですか？

A: 永久磁石では無理かもしれませんが、電磁石等の十分に強い磁場中に置けば、もとのネオジム磁石と同様になると思います。製品のネオジム磁石も最初、そのようにして磁化させています。

Q: IHの鍋底って触れたら感電するんですか？

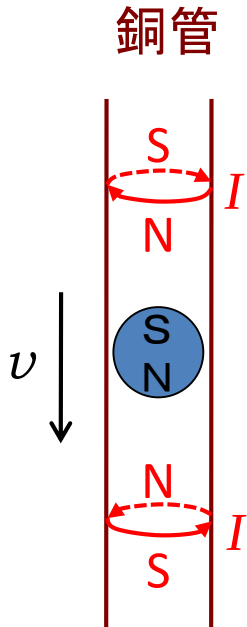
A: 鍋底には電磁誘導による大きな電流が流れますが、その電流の変化による電磁誘導(これから勉強する自己誘導)も考慮しなければいけません。結論だけ言うと感電しません。

Q: IHに手をつけてONにするとどうなるのか気になった。

A: 上の質問のようにIHの上に鍋があると、鍋に流れる誘導電流は、IHの発生する磁場を打ち消します(誘導電流は磁場の変化を打ち消す方向に流れる)。よって、鍋がある場合より、鍋がない場合の方がIHの発生する磁場の影響が大きいです。上の質問の感電に関していうと、鍋のない方がより危険(誘導電場が大きい)ですが、たぶん何ともないと思います。保証はできませんが。

実験① 鉄球を銅管に落としてみる。

実験② ネオジム磁石球を銅管に落としてみる。



左図のように、S極が上、N極が下の状態で落下する場合、ネオジム磁石の上側では、下向きの磁場が減少する
よって下向きの磁場をつくる誘導電流が銅管に流れる。

誘導電流(円電流)は、電磁石と同等であり、
誘導電流の作る磁場は、ネオジム磁石を上向きに引っぱる。

ネオジム磁石の下側では、下向きの磁場が増大する
よって上向きの磁場をつくる誘導電流が流れる。
誘導電流の作る磁場は、ネオジム磁石を上へ押す。

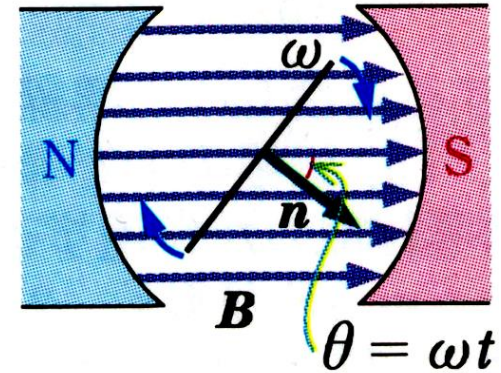
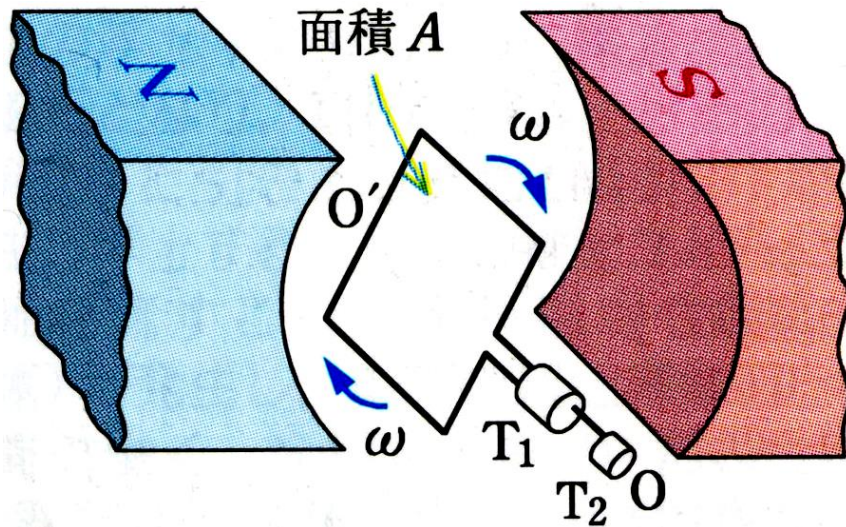
実験③ 見えやすいコの字型のアルミ板で実験

エネルギー保存則

鉄球を落下させると物体の位置エネルギーは運動エネルギーになる。
問題：ネオジム磁石の場合、位置エネルギーの大部分は何になるのか？

誘導電流が銅管で発生する熱(ジュール熱)

交流発電機



$\theta = 0$ のとき、 $\Phi_B = BA$

$\theta = \pi/2$ のとき、 $\Phi_B = 0$

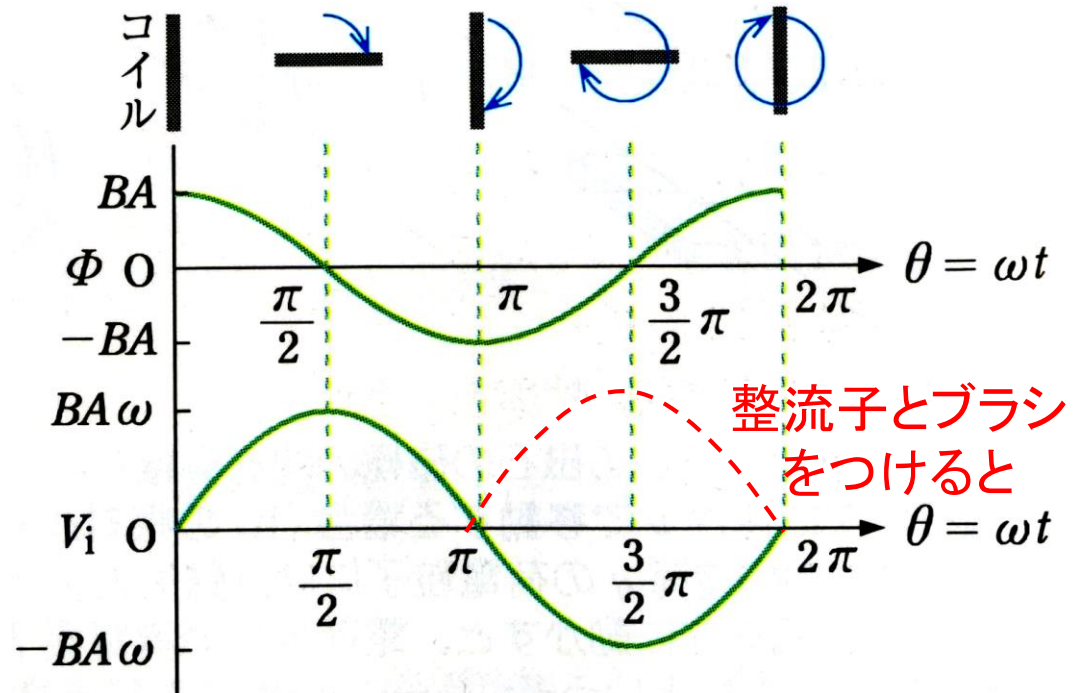
$\theta = \pi$ のとき、 $\Phi_B = -BA$

$$\Phi_B = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

電磁誘導の法則

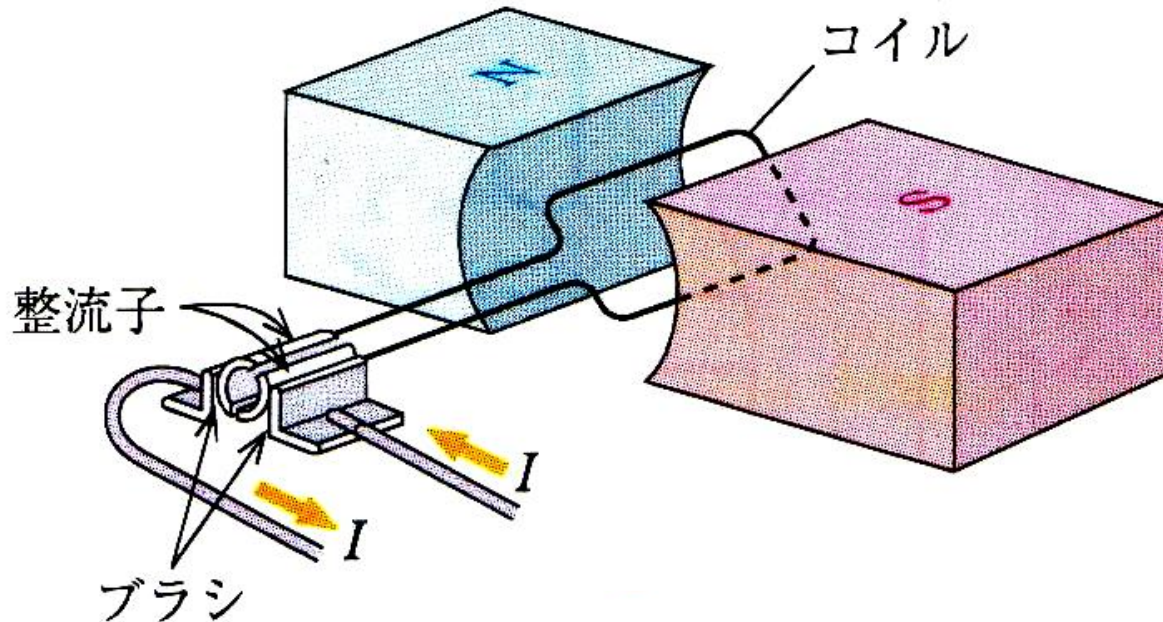
$$V_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$V_i = BA\omega \sin \omega t$$



直流発電機

交流発電機の図において、直流モーターのように、整流子とブラシをつけると直流発電機となる。



実験

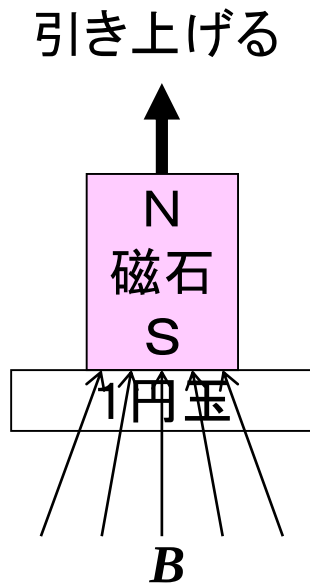
2個の直流モーターの軸をつなげ、一方を電池で回転させると、もう一方は発電機として動作する。

直流モーターは、直流発電機として利用できる。
(ハイブリット車でも駆動用モーター＝発電機のものもある)

1円玉の実験

③

1円玉の上にネオジム磁石を置いて、ネオジム磁石を急に引き上げると、1円玉がくっついて一緒に引き上がる。プラスチックのおもちゃのお金はくっつかない。



左の図の場合、磁石を引き上げると1円玉の中の上向き磁場が弱くなる。

1円玉の中には誘導電流が流れ上向きの向きの磁場を作る。

1円玉は誘導電流により磁石と同じ向きの電磁石になり、磁石を引き上げた時に、磁石と1円玉の間に引力が作用する。

IHクッキングヒーターのしくみと似ている。

1円玉も、わずかだが誘導電流によるジュール熱で発熱したはず。

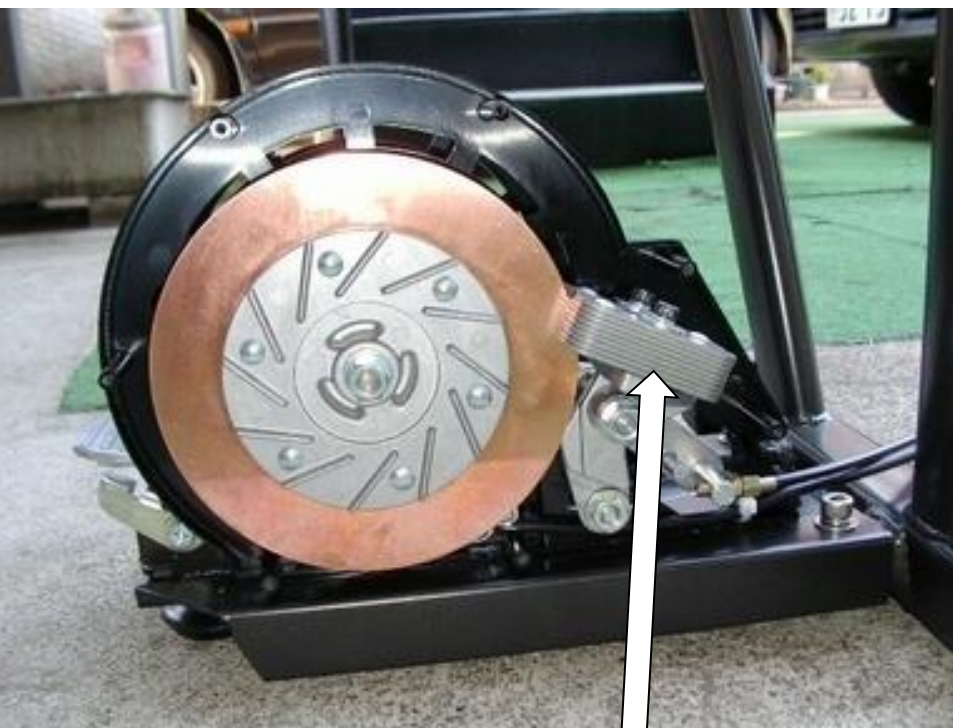
磁石を高速で上下させると、さらに大きな発熱が起こる。

IHクッキングヒーターは電磁石に交流を流すことで磁場を変動させている。

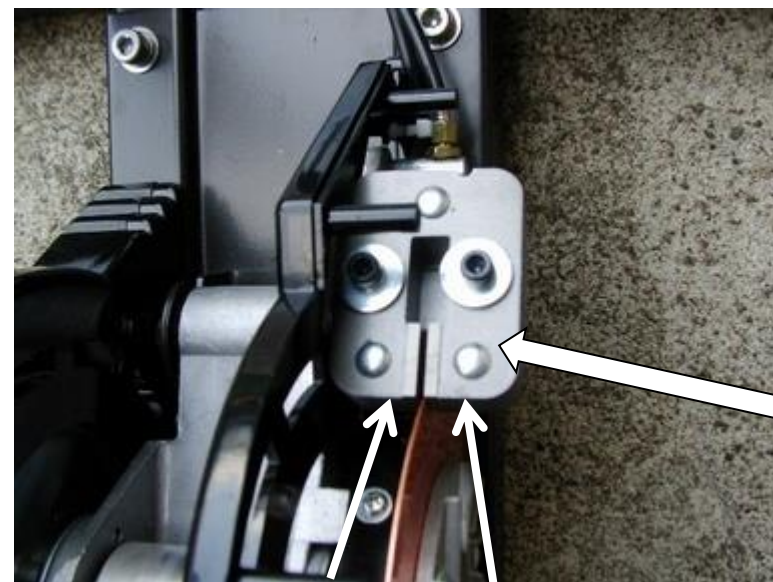
マグネット負荷式エアロバイク

④

銅製のディスクを磁石が挟んでいる(触れていない)
銅のディスクに渦電流が流れ回転にブレーキをかける
銅管中のネオジム磁石がゆっくり落ちたのと同じ
負荷を大きくするときは、磁石とディスクの重なりを大きくする
ペダルを漕ぐときにした仕事 → 渦電流によるジュール熱



磁石



N 銅板 S

磁石

問題：自転車等のディスクブレーキに似ているが、代わりに用いることはできるか？

できない。
停止している時はブレーキがかからない。

摩擦を利用する一般的な自転車のブレーキは、動摩擦力が速度に依らないことを考えると、自転車の速度と無関係な一定の制動力が作用する。
停止しているときは、静止摩擦力が作用する。

コイルを流れる電流 I が変化 → そのコイル自身を貫く磁場が変化

→ 誘電起電力が生じる。この電磁誘導現象を

自己誘導

という。

自己誘導による起電力を

逆起電力

ともいう。

電流を変化を妨げる向きなので「逆」 例：電流が増加する場合は減少させる向き

回路(コイル)を貫く磁束 $\Phi_B \propto$ 電流 I

コイルが N 巻きの場合、回路を貫く全磁束は、 $N\Phi_B$ ($\propto$ 電流 I)

(ここで Φ_B は、コイル1巻きを貫く磁束)

全磁束を
書画カメラ
で説明

1 A あたりの
全磁束

比例定数を L とすると、 全磁束 $= N\Phi_B = LI$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$

L をインダクタンス、

自己インダクタンス

という

インダクタンスの単位は

ヘンリー

, 記号 $H = \text{Wb/A} = \text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A} = \text{V} \cdot \text{s/A}$

電磁誘導の法則: $V_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$ なので

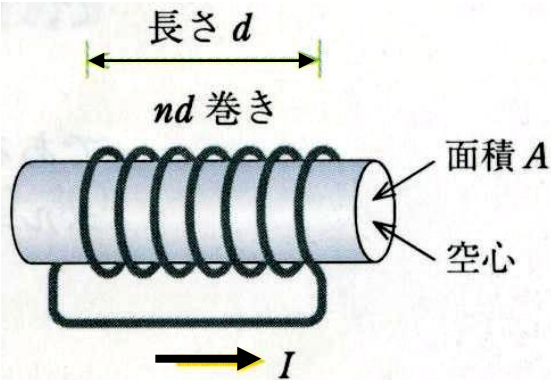
全磁束 $= N\Phi_B = LI$ より (時刻 t で微分すれば上式)

自己誘導の誘導起電力(逆起電力): $V_i = -L \frac{dI}{dt}$

(自己インダクタンス L は、電流の時間変化率にかかる比例定数)

例題3 (p276) ①: 左図のような空心のソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ。ソレノイドは十分に長いものとして計算せよ。

n : 単位長さあたりの巻き数



ソレノイド内部の磁場: $B = \mu_0 nI$

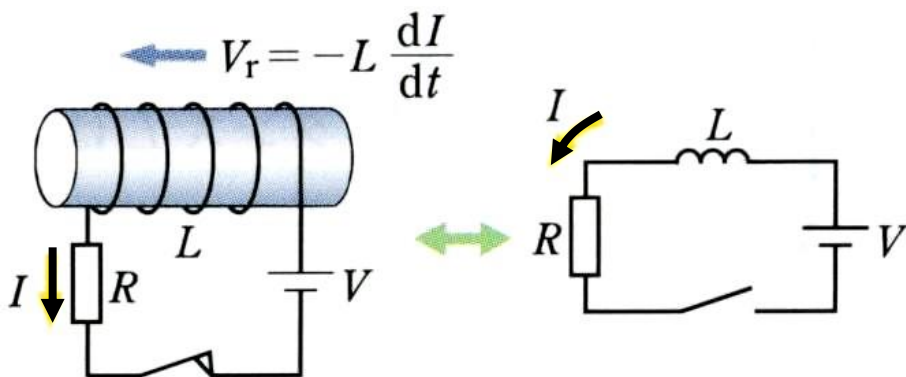
磁束 $\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{nd\Phi_B}{I} = \frac{nd\mu_0 nIA}{I} = \mu_0 n^2 Ad$$

② 面積 $A = 4 \text{ cm}^2$ 、長さ 50 cm 、巻き数 $N = 200$ のとき自己インダクタンスを計算せよ。

$$L = \mu_0 n^2 Ad = 4\pi \times 10^{-7} \times 400^2 \times 0.0004 \times 0.5 \div 4 \times 10^{-5} [\text{H}]$$

LR回路

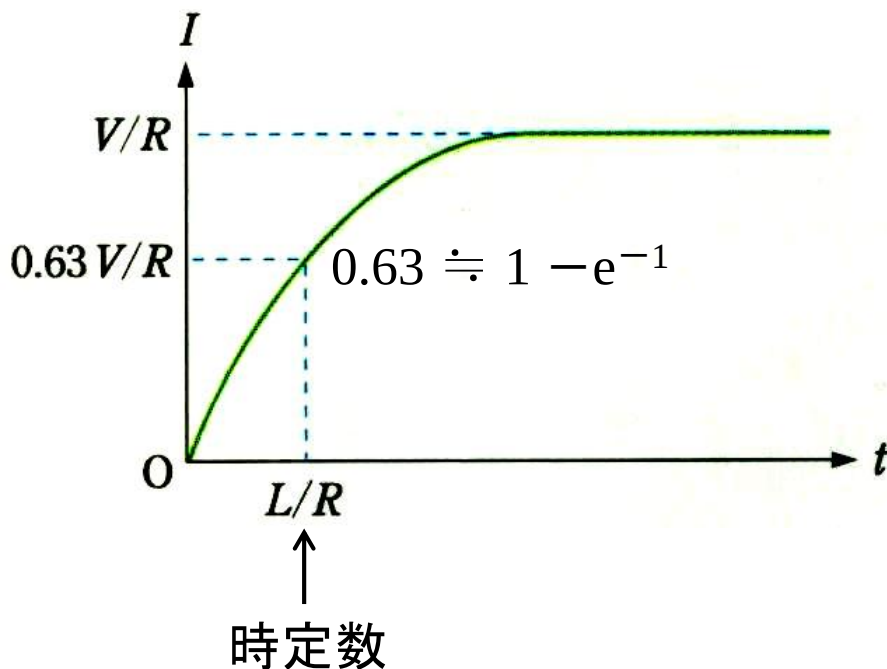


回路の全起電力は
電池の起電力 V + 誘導起電力 $-L \frac{dI}{dt}$
よってオームの法則は、

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$t = 0$ でスイッチを入れた場合

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad \text{解き方は⑩}$$



時定数

残りの変化が $1/e$ (約37%) になる時刻
(CR回路等の時定数も同じ)

コイルがなければ、電流はすぐに
 $\frac{V}{R}$ となるが、コイルがあると

逆起電力が発生し、
その値となるのに時間がかかる。
その時間の目安が時定数 τ である。

$$\tau = \frac{L}{R}$$

問題:LR回路において、コイルのインダクタンスが

⑦の問題と同じ $4 \times 10^{-5} \text{ H}$, 抵抗が $1 \text{ k}\Omega$ (1000Ω) の場合の時定数を求めよ。
(1 H という値はとても大きな値)

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4 \times 10^{-5}}{1000} = 4 \times 10^{-8} [\text{s}]$$

(参考)⑧の微分方程式の解き方はCR回路の場合と、ほぼ同じ(テストに出ません)⑩
教科書にも載っていない。

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (L, R, V \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{V/R - I} \frac{dI}{dt} = \frac{R}{L}$$

I に対する変数分離型微分方程式

$$\int \frac{dI}{V/R - I} = \frac{R}{L} \int dt$$

$$\ln \left| \frac{V}{R} - I \right| = -\frac{Rt}{L} + c \quad c \text{ は任意定数}$$

正

$$\ln \left(\frac{V}{R} - I \right) = -\frac{Rt}{L} + c$$

$$t = 0 \text{ のとき } I = 0 \text{ なので } c = \ln \left(\frac{V}{R} \right)$$

$$\ln \left(1 - \frac{R}{V} I \right) = -\frac{Rt}{L}$$

真数に戻すと

$$1 - \frac{R}{V} I = e^{-Rt/L}$$

$$\frac{R}{V} I = 1 - e^{-Rt/L}$$

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

コイルに流れる電流を増すと、電流の増加を妨げる向きに逆起電力が発生する。



たとえコイルの電気抵抗が無くても、

逆起電力に逆らって電流を増すには仕事をする必要がある。

この時に投入したエネルギーが、磁場のエネルギーとして蓄えられる。

超伝導のように抵抗が無い場合も電流を流し続けるのにエネルギーはいらないが、
電流を増加させるには、同じエネルギーが必要。

回路に電流 I が流れている時に

時間 Δt で、 ΔI だけ電流を増すのに必要な仕事 ΔW は

$$\Delta W = \text{電圧 (逆起電力)} \times \text{電荷} = L \frac{\Delta I}{\Delta t} \times I \Delta t = LI \Delta I \quad W = QV$$

$$\text{電流を } 0 \text{ から } I \text{ まで増すときに必要な仕事: } W = \int_0^I LI \, dI = \frac{1}{2} LI^2$$

電流 I が流れている自己インダクタンス L のコイルの磁気的なエネルギー

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

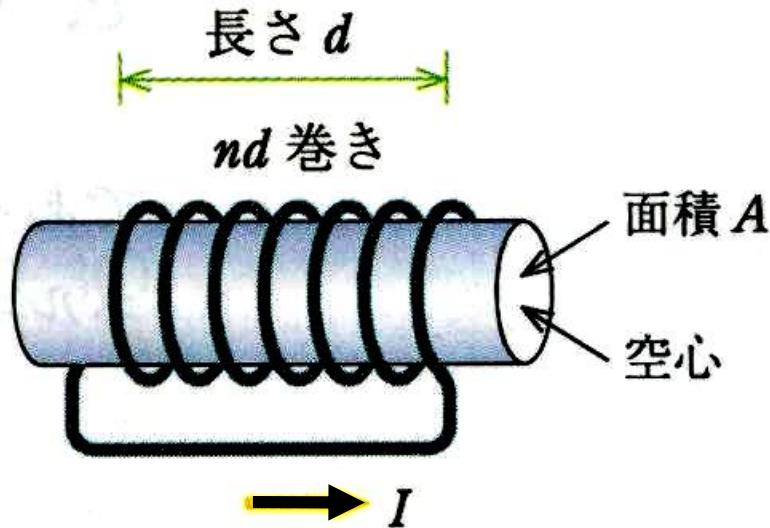
長いソレノイドに蓄えられたエネルギー

ソレノイドの内部の磁場: $B = \mu_0 n I$

ソレノイドの自己インダクタンス: $L = \mu_0 n^2 A d$

$$\text{磁気的なエネルギー: } U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 A d I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 (\underbrace{A d}_{\text{ソレノイド内の体積}}) = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 (\underbrace{A d}_{\text{ソレノイド内の体積}})$$

ソレノイド内の体積



単位体積あたりの磁場のエネルギー u_B は

$$u_B = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \quad (\text{真空中})$$

参考: 電場のエネルギー u_E は

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{真空中})$$

どちらも2乗に比例する。

最強の永久磁石はネオジム磁石です。ネオジム磁石の表面付近の磁場の強さは ⑬
約 0.5 Tです。問題:ネオジム磁石の表面付近の 1 cm^3 の部分の磁場のエネルギー
を求めよ。

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \doteq 1.0 \times 10^5 \text{ J/m}^3$$

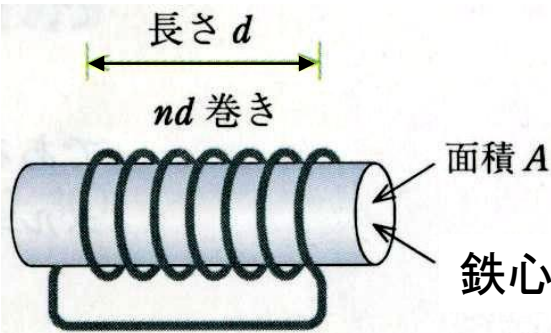
$$1.0 \times 10^5 [\text{J/m}^3] \times 10^{-6} [\text{m}^3] = 0.1 [\text{J}]$$

ソレノイドの内部が比透磁率 μ_r の鉄心で満たされている場合

⑭

ソレノイドが十分に長い場合、内部の磁場の強さは $B = \mu_r \mu_0 n I$ である。

問題: このソレノイドの自己インダクタンス L はいくらか。⑰参照



$$\text{磁束 } \Phi_B = BA = \mu_r \mu_0 n I A$$

$$L = \frac{N \Phi_B}{I} = \frac{nd \Phi_B}{I} = \frac{nd \mu_r \mu_0 n I A}{I} = \mu_r \mu_0 n^2 A d$$

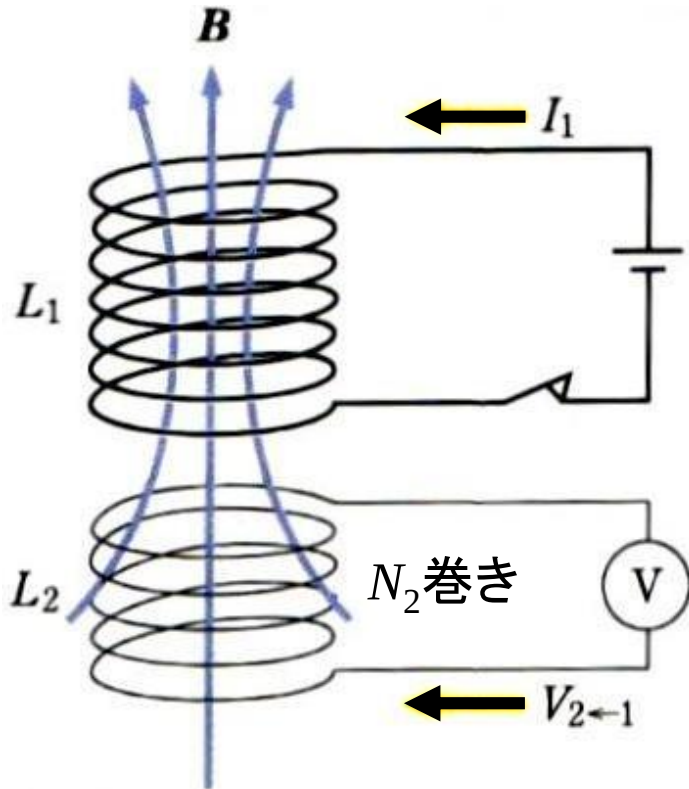
$$\text{磁気的なエネルギー: } U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 n^2 A d I^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 n^2 I^2 (A d) = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2 (A d)$$

$$\text{単位体積あたりの磁場のエネルギー: } u_B = \frac{1}{2 \mu_r \mu_0} B^2 \quad (\text{比透磁率 } \mu_r \text{ の物質中})$$

$$u_B = \frac{1}{2 \mu} B^2$$

↑ 透磁率

真空の場合の $\frac{1}{\mu_r}$ 倍だが B が μ_r 倍になっているので、電流が同じ場合は空心の μ_r 倍



スイッチを入れたら、

コイル L_1 を流れる電流 I_1 が変化する



電流 I_1 が作る磁場が変化する



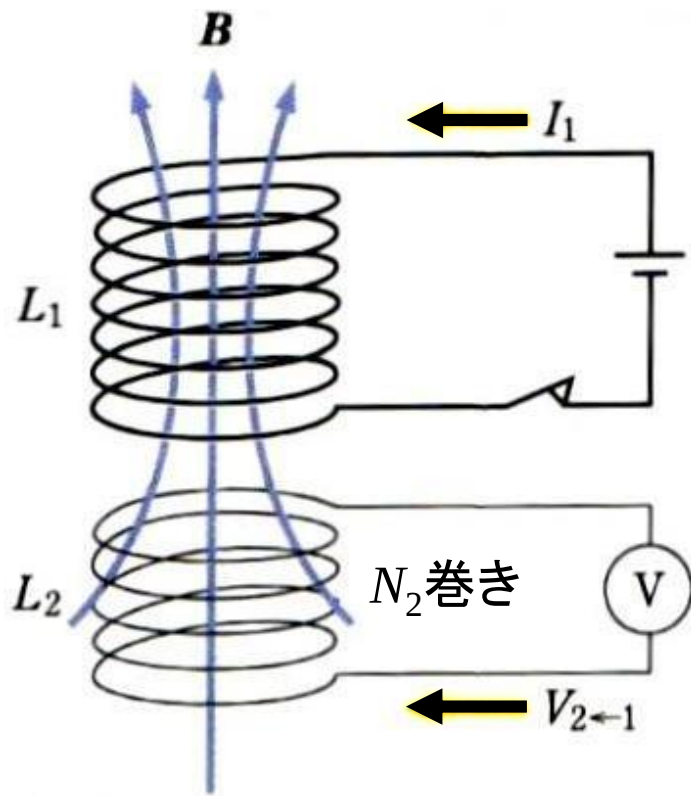
コイル L_2 を貫く磁束が変化する。



コイル L_2 に、磁束の変化を妨げる方向に
誘導起電力 $V_{2\leftarrow 1}$ が発生する。

相互誘導

1つの閉回路の電流が変化すると、
他の閉回路に誘導起電力が生じる現象



コイル L_1 を流れる電流 I_1 が作る磁束のうち、
コイル L_2 内を貫く磁束を $\Phi_{2\leftarrow 1}$ とすると (1 巻きを)

$$V_{2\leftarrow 1} = -N_2 \frac{d\Phi_{2\leftarrow 1}}{dt} \quad \Phi_{B(2\leftarrow 1)}$$

全磁束 $N_2 \Phi_{2\leftarrow 1} \propto I_1$ なので

$N_2 \Phi_{2\leftarrow 1} = M_{21} I_1$ とすると、(M_{21} は比例定数)

$N\Phi_B = LI$
自己誘導

$$V_{2\leftarrow 1} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

逆にコイル L_2 に流れる電流 I_2 が
変化すると、コイル L_1 に
誘導起電力 $V_{1\leftarrow 2}$ が発生する。
以下同様。証明は省略するが

$$\text{相互インダクタンス } M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{2\leftarrow 1}}{I_1}$$

単位: ヘンリー, 記号 H

$$M_{12} = M_{21}$$

相互インダクタンスの相反定理

添え字は意味ないので単に M でよい。

$$V_{1\leftarrow 2} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$V_{2\leftarrow 1} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

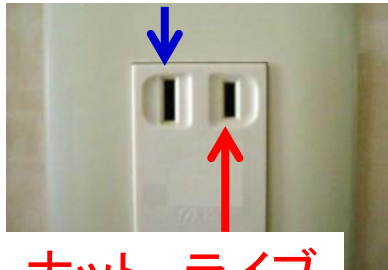
自己誘導と同じ形: $V_i = -L \frac{dI}{dt}$

直流: 電流の向きが、時間とともに変化しない。DC (Direct Current)

交流: 電流の向きが、時間とともに絶えず交替し続ける。AC (Alternate Current)

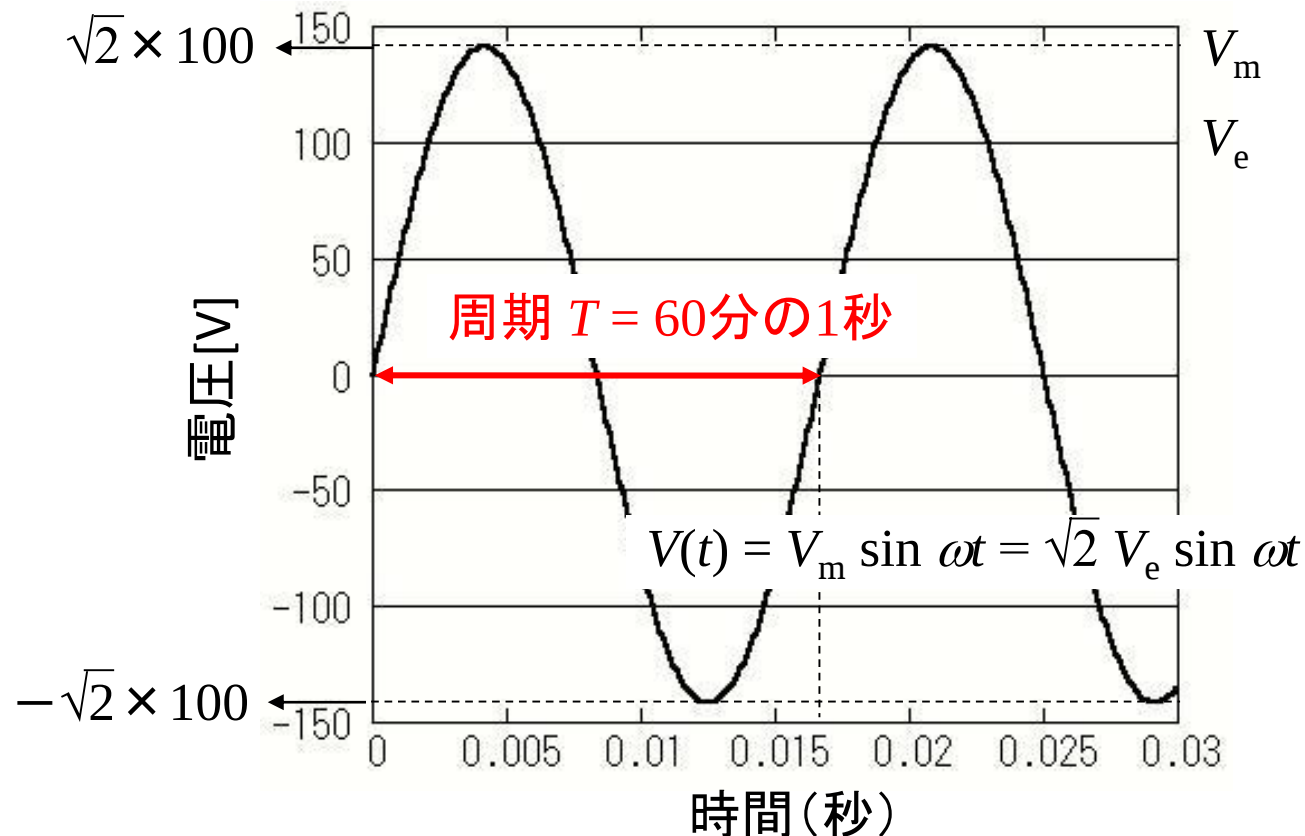
家庭用の電源(コンセント)の電圧(ホットの電位)の時間変化

コールド, アース
グランド, 0 V



ホット, ライブ
(右のグラフ)

注: 延長コードの
場合は、プラグの
差し込み方で
逆になることがある。



家庭用電源の周波数 f : 西日本 60 Hz, 東日本 50 Hz, 富山は 60 Hz

$$V(t) = V_m \sin \omega t = \sqrt{2} V_e \sin \omega t$$

V_m : 電圧の最大値、 V_e : 電圧の
maximum effective

実効値

家庭用の電源は100 V だが、この100 Vは実効値のこと。

最大値はその $\sqrt{2}$ 倍の約141 Vである。

ω, f, T の名称:

物体の回転	角速度 ω	回転数 f	周期 T
物体の振動	角振動数 ω	振動数 f	周期 T
交流	角周波数 ω	周波数 f	周期 T

交流とオームの法則

$V = RI$ (電圧・電流が一定の時)

$V(t) = RI(t)$ (電圧・電流が時間とともに変化しても成り立つ)

$$V(t) = RI(t) = V_m \sin \omega t = \sqrt{2} V_e \sin \omega t$$

$$I(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = \sqrt{2} \frac{V_e}{R} \sin \omega t$$

$$I(t) = I_m \sin \omega t = \sqrt{2} I_e \sin \omega t$$

I_m : 電流の最大値

I_e : 電流の実効値

$$V_m = RI_m, V_e = RI_e$$

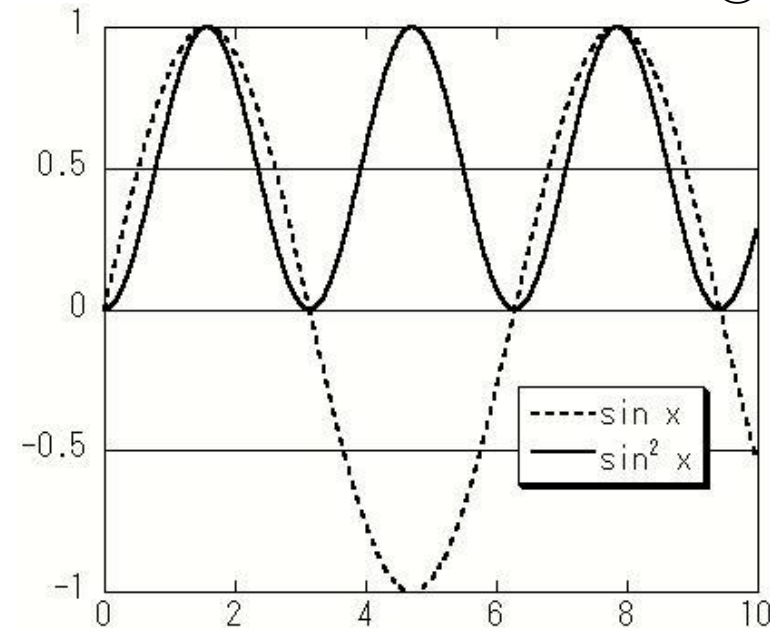
交流の電力

$$\text{電力 } P(t) = V(t) I(t)$$

回路にコイルやキャパシターを含まない場合、
電圧 V と電流 I の位相は揃っている。

$$\text{電力 } P(t) = V(t) I(t) = V_m I_m \sin^2 \omega t = 2 V_e I_e \sin^2 \omega t$$

$$\text{電力の時間平均 } \langle P \rangle = 0.5 V_m I_m = V_e I_e = R I_e^2 = \frac{V_e^2}{R}$$



実効値は、交流の実質的な指標であり、オームの法則 $V_e = R I_e$ も成り立ち、

上記のように電力の平均も実効値を使うと直流の時と同じである。

最大値はオームの法則 ($V_m = I_m R$) は成り立つが、電力は $\langle P \rangle \neq V_m I_m$

注意: コイルやキャパシターを含む回路は一般に $\langle P \rangle \neq V_e I_e$

(電圧 V と電流 I の位相がずれている)

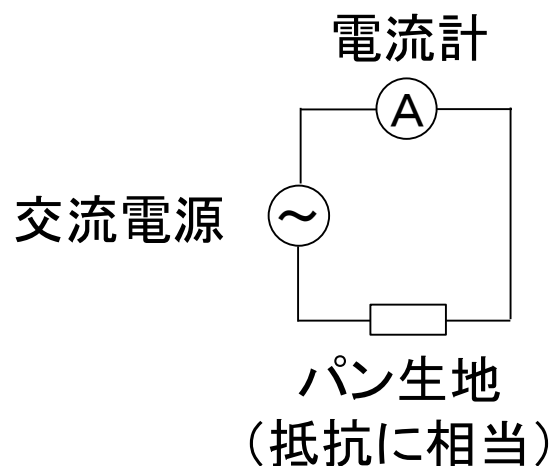
電気パンの実験(再考)

ジュール熱でパン(ホットケーキ)をつくる

ステンレスの電極を
コンセント($V_e = 100$ [V])に接続

回路図

電流計の
示す値は
実効値 I_e である。



牛乳パックの下の部分

スタート時刻: 0:00 電流: 0.12 A 電力: 12 W

終了時刻: 0:10 電流: 0.14 A 電力: 14 W

問題: 消費した電力量: (平均値を使うと) $13 \text{ W} \times 600 \text{ s} = 7800 \text{ J}$

コイルやキャパシターが含まれる交流回路

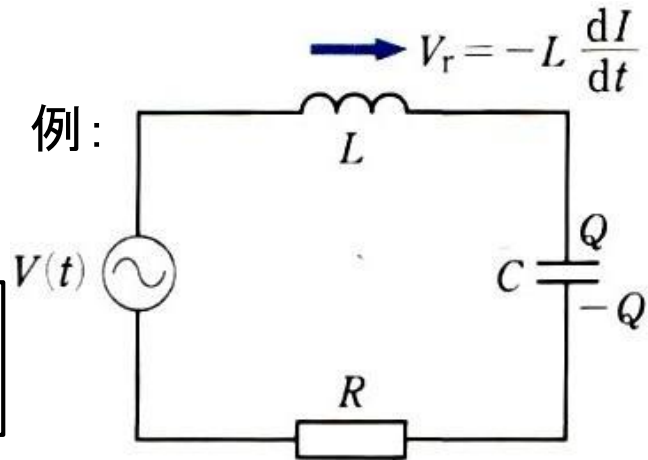
(21)

$$V(t) = V_m \sin \omega t$$
$$I(t) = I_m \sin (\omega t - \phi)$$

電圧と電流の
位相はそろわない。

角 ϕ :

位相のずれ(遅れ)



電圧と電流の比

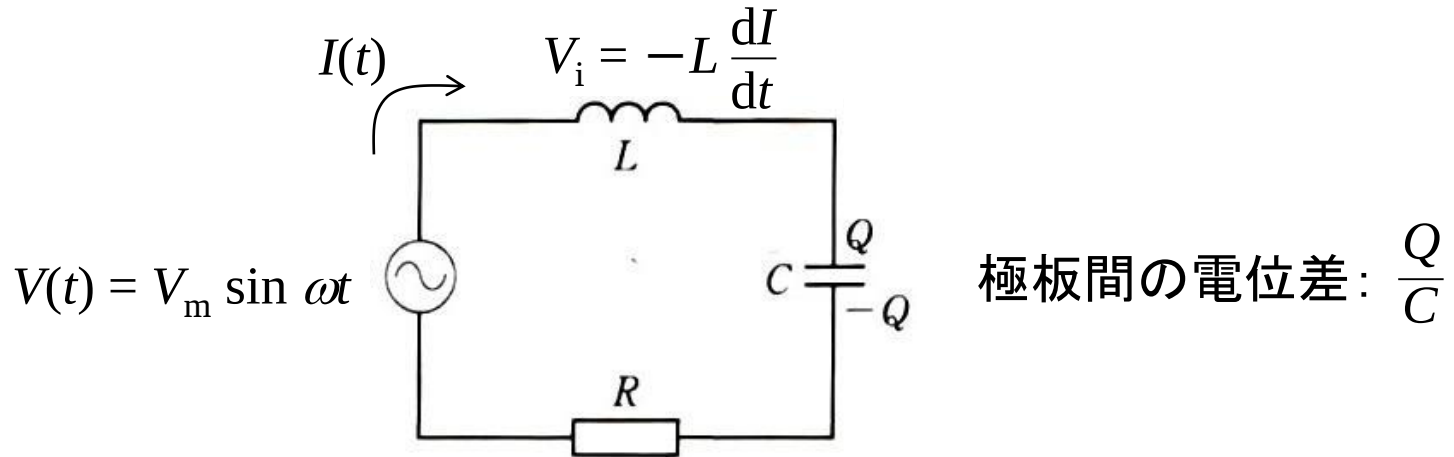
直流回路

抵抗: $R = \frac{V}{I}$

交流回路

インピーダンス

: $Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$



「回路の全起電力」＝「抵抗での電圧降下」＋「キャパシターでの電圧降下」
 (電源の起電力＋誘電起電力)

未知関数2個

$$V_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}$$

t で微分して

$$\omega V_m \cos \omega t - L \frac{d^2 I}{dt^2} = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_m \cos \omega t$$

未知関数1個
 $\Rightarrow$ 解ける

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_m \cos \omega t$$

この微分方程式は抵抗のある強制振動の運動方程式と同じ形

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

速度に
比例する抵抗
復元力
周期的に
変化する外力

一般解: $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \phi) + Ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \theta_0)$

A と θ_0 は
任意定数

外力の角振動数 ω での振動

RLC回路でも
この項だけ考える

時間の経過とともに 0 になる。

あまり重要でない。
時間が経つと無くなる項

$$I(t) = I_m \sin(\omega t - \phi)$$

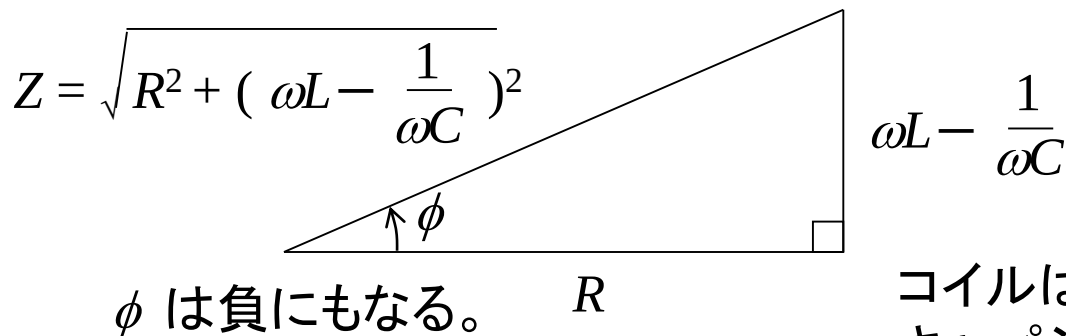
$$I_m = \frac{V_m}{Z}$$

RLC回路でもこの項は
時間が経つと無くなるので無視

$$\text{回路のインピーダンス: } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

(遅れ)
位相のずれ ϕ : $\sin \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z}$, $\cos \phi = \frac{R}{Z}$, $\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

図で表現すると



コイルは電流の位相を遅らす。
キャパシターは早める

インピーダンス Z は、 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ のとき最小になり、電流は最大になる(共振する)

$\omega^2 = \frac{1}{LC}$

その時の角周波数 ω_R は $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

周波数(共振周波数) f_R は $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$