

Q: 期末試験は1月30日(木)で決定でしょうか? A: はい。決定です。

Q: 期末試験の試験範囲を教えてください。 A: 22.1 のマクスウェル方程式までです。

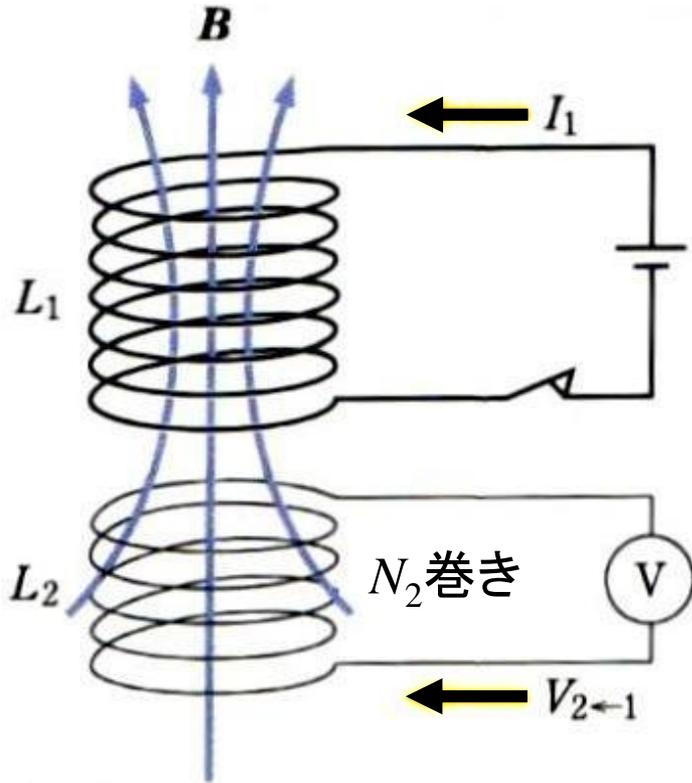
Q: 単位体積あたりの磁場のエネルギーの式が磁石の表面で使える理由がわかりません。

A: 良い質問です。磁場のエネルギーの式は、ソレノイド中に限らず、すべての場所の磁場に使えます。ソレノイドを使って求めたにすぎません。電場のエネルギーもキャパシタの極板間に限らず、すべての場所の電場に使えます。例えば2つの永久磁石が引き合って仕事をする場合、磁場のエネルギーの減少分の仕事をしたと考えることもできます。

Q: コンセントにクリップを差し込んで「ビリっ」となるのが楽しくて、小さいころやっていたんですが、壁が焦げたので怒られました。たぶん、これ危ないですよね。

A: はい。危ないと思います。危険度は床の材質や、靴や靴下にも依ります。電気の通しやすい床(濡れた床等)で裸足でやると、かなり危ないと思います。今日、コンセントの話もします。

Q: 最近、新しい球電の動画が上がっていた。 A: 駅のホームの動画かな? これはウソっぽい。



スイッチを入れると、

コイル L_1 を流れる電流 I_1 が変化する

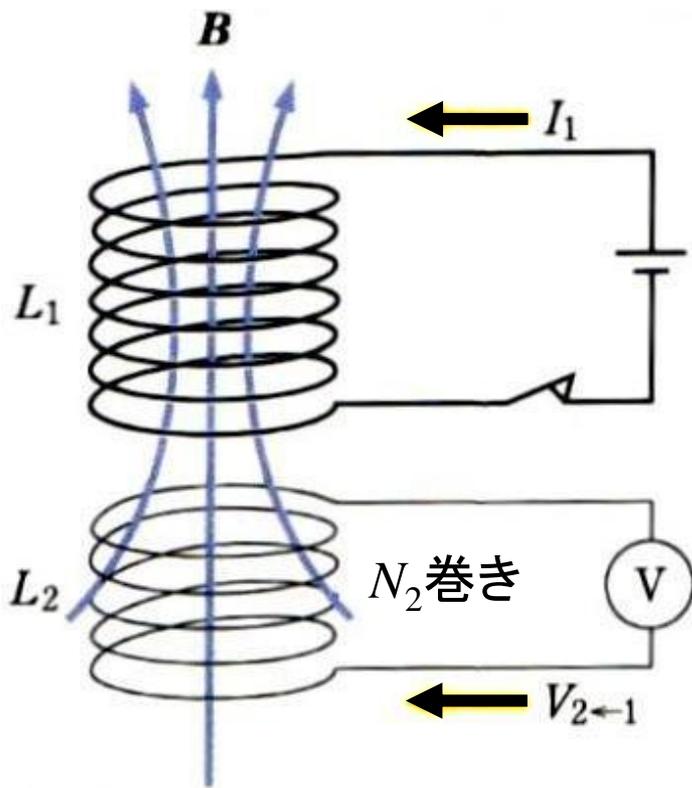
↓
電流 I_1 が作る磁場が変化する

↓
コイル L_2 を貫く磁束が変化する。

↓
コイル L_2 に、磁束の変化を妨げる方向に
誘導起電力 $V_{2\leftarrow 1}$ が発生する。

相互誘導

1つの閉回路の電流が変化すると、
他の閉回路に誘導起電力が生じる現象



コイル L_1 を流れる電流 I_1 が作る磁束のうち、
コイル L_2 内を貫く磁束を $\Phi_{2\leftarrow 1}$ とすると (1巻きを)

$$V_{2\leftarrow 1} = -N_2 \frac{d\Phi_{2\leftarrow 1}}{dt} \quad \Phi_{B(2\leftarrow 1)}$$

全磁束 $N_2 \Phi_{2\leftarrow 1} \propto I_1$ なので

$N_2 \Phi_{2\leftarrow 1} = M_{21} I_1$ とすると、(M_{21} は比例定数)

$N\Phi_B = LI$
自己誘導

$$V_{2\leftarrow 1} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

逆にコイル L_2 に流れる電流 I_2 が
変化すると、コイル L_1 に
誘導起電力 $V_{1\leftarrow 2}$ が発生する。
以下同様。証明は省略するが

相互インダクタンス $M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{2\leftarrow 1}}{I_1}$

単位: ヘンリー, 記号 H

$$M_{12} = M_{21}$$

相互インダクタンスの相反定理

添え字は意味ないので単に M でよい。

$$V_{1\leftarrow 2} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$V_{2\leftarrow 1} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

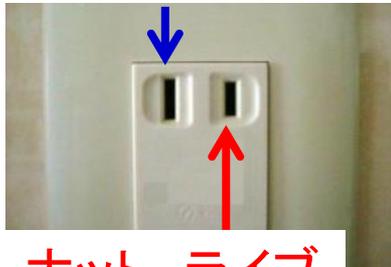
自己誘導と同じ形: $V_i = -L \frac{dI}{dt}$

直流: 電流の向きが、時間とともに変化しない。DC (Direct Current)

交流: 電流の向きが、時間とともに絶えず交替し続ける。AC (Alternate Current)

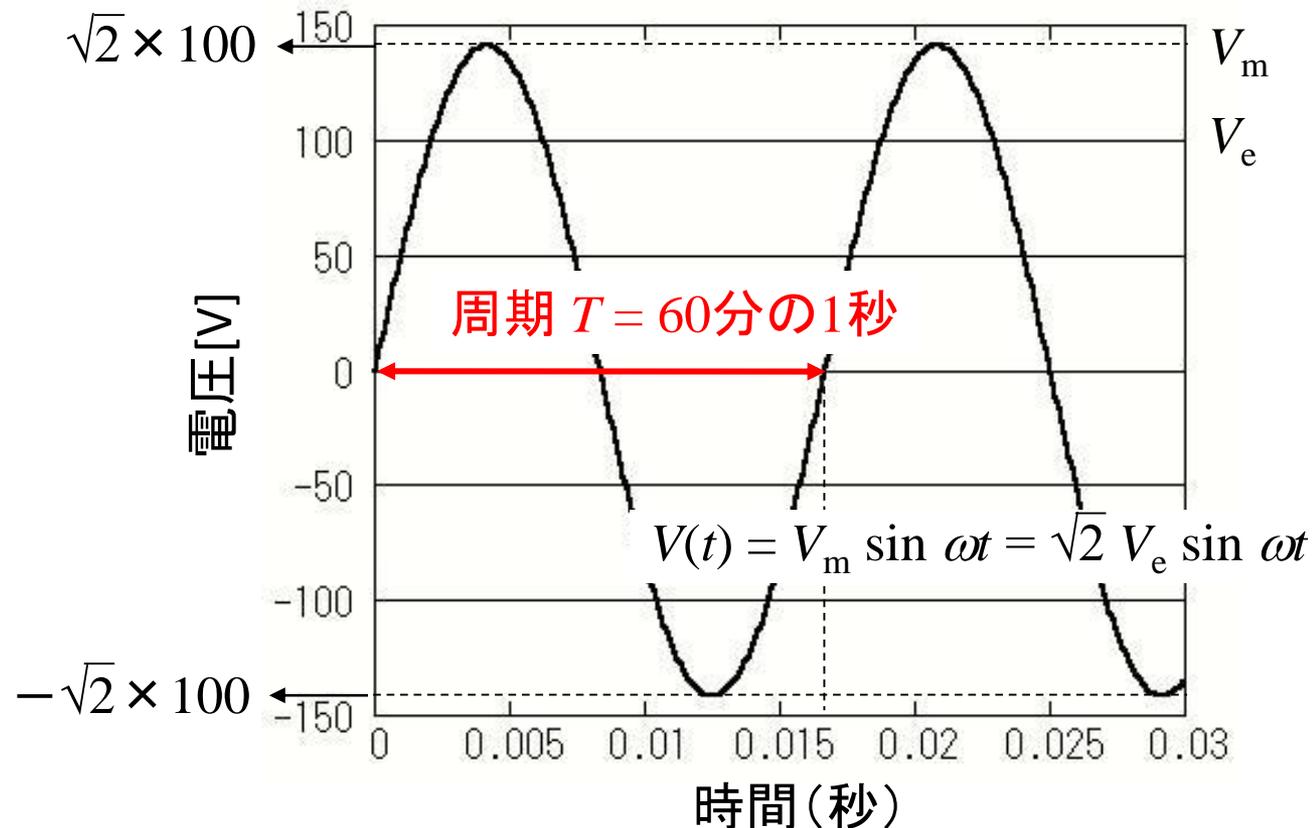
家庭用の電源(コンセント)の電圧(ホットの電位)の時間変化

コールド, アース
グラウンド, 0V



ホット, ライブ
(右のグラフ)

注: 延長コードの
場合は、プラグの
差し込み方で
逆になることがある。



家庭用電源の周波数 f : 西日本 60 Hz, 東日本 50 Hz, 富山は 60 Hz

$$V(t) = V_m \sin \omega t = \sqrt{2} V_e \sin \omega t$$

V_m : 電圧の最大値、 V_e : 電圧の
maximum effective

実効値

家庭用の電源は100 V だが、この100 Vは実効値のこと。

最大値はその $\sqrt{2}$ 倍の約141 Vである。

ω, f, T の名称:

物体の回転	角速度 ω	回転数 f	周期 T
物体の振動	角振動数 ω	振動数 f	周期 T
交流	角周波数 ω	周波数 f	周期 T

交流とオームの法則

$$V = RI \text{ (電圧・電流が一定の時)}$$

$$V(t) = RI(t) \text{ (電圧・電流が時間とともに変化しても成り立つ)}$$

$$V(t) = RI(t) = V_m \sin \omega t = \sqrt{2} V_e \sin \omega t$$

$$I(t) = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = \sqrt{2} \frac{V_e}{R} \sin \omega t$$

$$I(t) = I_m \sin \omega t = \sqrt{2} I_e \sin \omega t$$

I_m : 電流の最大値

I_e : 電流の実効値

$$V_m = RI_m, V_e = RI_e$$

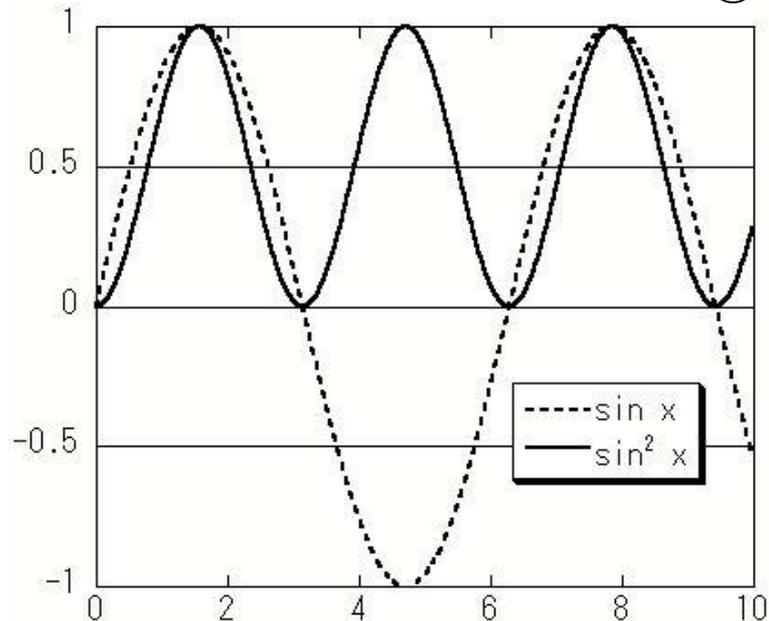
交流の電力

$$\text{電力 } P(t) = V(t) I(t)$$

回路にコイルやキャパシターを含まない場合、
電圧 V と電流 I の位相は揃っている。

$$\text{電力 } P(t) = V(t) I(t) = V_m I_m \sin^2 \omega t = 2V_e I_e \sin^2 \omega t$$

$$\text{電力の時間平均 } \langle P \rangle = 0.5 V_m I_m = V_e I_e = R I_e^2 = \frac{V_e^2}{R}$$



実効値は、交流の実質的な指標であり、オームの法則 $V_e = R I_e$ も成り立ち、

上記のように電力の平均も実効値を使うと直流の時と同じである。

最大値はオームの法則 ($V_m = I_m R$) は成り立つが、電力は $\langle P \rangle \neq V_m I_m$

注意: コイルやキャパシターを含む回路は一般に $\langle P \rangle \neq V_e I_e$

(電圧 V と電流 I の位相がずれている)

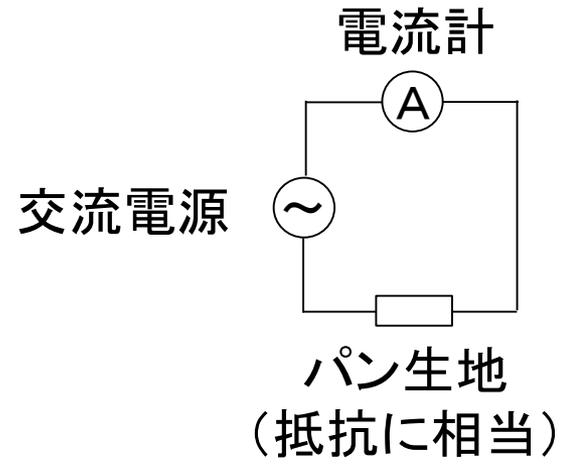
電気パンの実験(再考)

ジュール熱でパン(ホットケーキ)をつくる

ステンレスの電極を
コンセント ($V_e = 100 [V]$) に接続

回路図

電流計の
示す値は
実効値 I_e である。



↑
牛乳パックの下の部分

スタート時刻: 0:00 電流: 0.12 A 電力: 12 W

終了時刻: 0:10 電流: 0.14 A 電力: 14 W

問題: 消費した電力量: (平均値を使うと) $13 W \times 600 s = 7800 J$

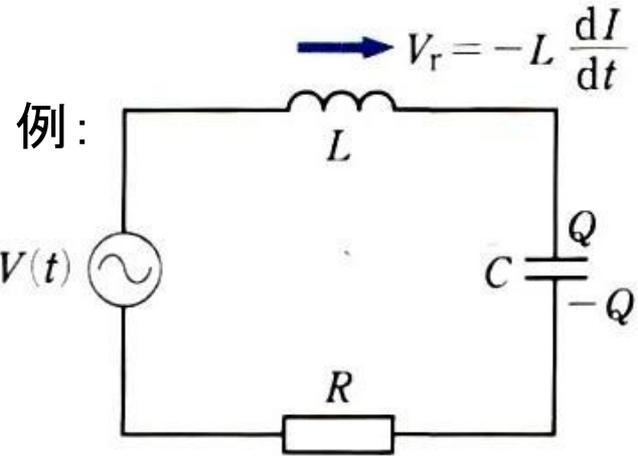
コイルやキャパシターが含まれる交流回路

$$V(t) = V_m \sin \omega t$$
$$I(t) = I_m \sin (\omega t - \phi)$$

電圧と電流の
位相はそろわない。

角 ϕ :

位相のずれ(遅れ)



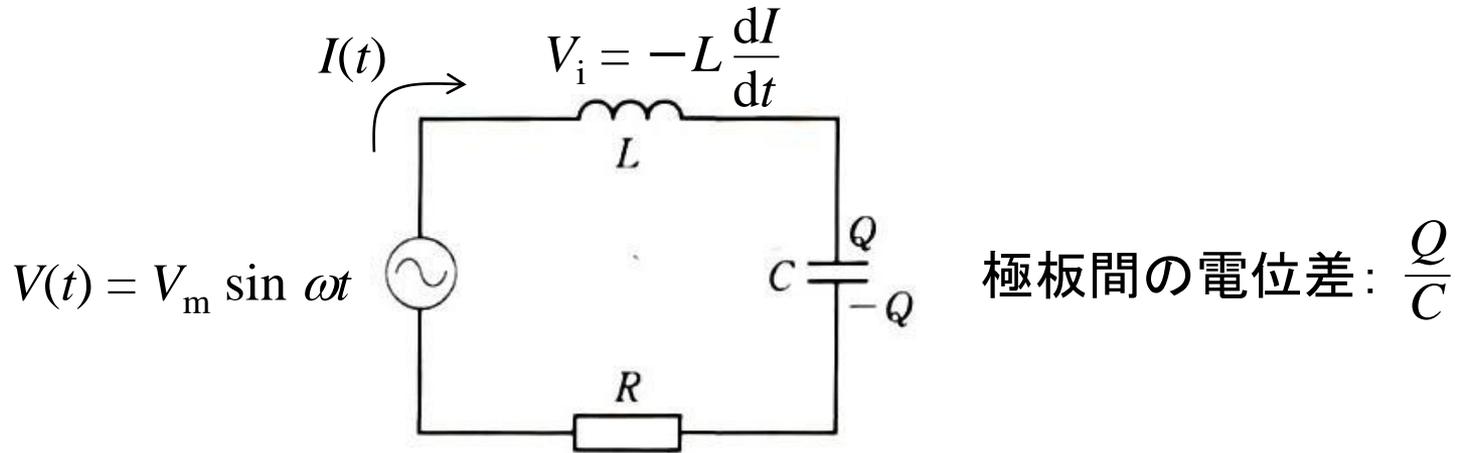
電圧と電流の比

直流回路

抵抗: $R = \frac{V}{I}$

交流回路

インピーダンス : $Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$



「回路の全起電力」＝「抵抗での電圧降下」＋「キャパシターでの電圧降下」
 (電源の起電力＋誘電起電力)

未知関数2個

$$V_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}$$

t で微分して $\omega V_m \cos \omega t - L \frac{d^2 I}{dt^2} = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_m \cos \omega t$$

未知関数1個
 \Rightarrow 解ける

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_m \cos \omega t$$

この微分方程式は抵抗のある強制振動の運動方程式と同じ形

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

速度に
比例する抵抗
復元力
周期的に
変化する外力

一般解: $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \phi) + Ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \theta_0)$

Aとθ₀は任意定数

外力の角振動数 ω での振動

時間の経過とともに 0 になる。

RLC回路でも
この項だけ考える

あまり重要でない。
時間が経つと無くなる項

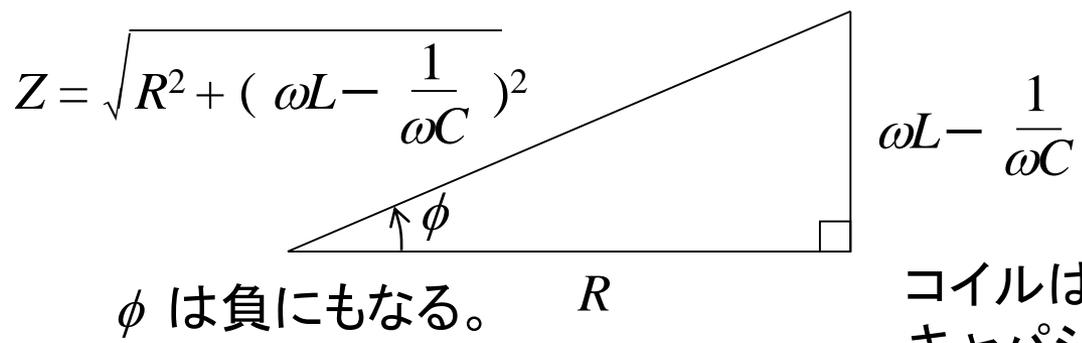
RLC回路でもこの項は
時間が経つと無くなるので無視

$$I(t) = I_m \sin(\omega t - \phi) \quad I_m = \frac{V_m}{Z}$$

回路のインピーダンス: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

(遅れ)
 位相のずれ ϕ : $\sin \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z}$, $\cos \phi = \frac{R}{Z}$, $\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

図で表現すると



コイルは電流の位相を遅らす。
 キャパシターは早める

インピーダンス Z は、 $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ のとき最小になり、電流は最大になる(共振する)

$\omega^2 = \frac{1}{LC}$

その時の角周波数 ω_R は $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

周波数(共振周波数) f_R は $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

(つづき)問題④: 回路を流れる電流の実効値 I_e を求めよ。

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e} \qquad I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{100}{2.6 \times 10^4} \doteq 0.0038 \text{ A}$$

問題⑤: 回路の消費電力を求めよ。ヒント: コイルとコンデンサではエネルギーは消費されない。抵抗でのみジュール熱となる。

$$P = RI_e^2 \doteq 6.8 \times 10^{-4} \text{ [W]}$$

交流回路の消費電力は電源の電圧を V_e とすると $V_e I_e$ ではなく、

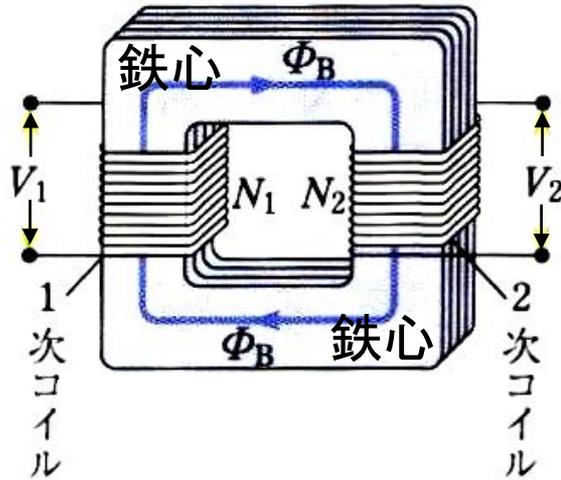
$RI_e^2 = \frac{R}{Z} V_e I_e = \cos \phi V_e I_e$ である。この赤字の因子を 力率 という。

問題⑥: この場合の力率を求めよ。

$$\frac{R}{Z} \doteq 0.0018$$

相互誘導を利用して交流の電圧を上げたり下げたりする装置

鉄心を通る磁束は、ほとんど外にもれない→それぞれのコイルを貫く磁束は等しい



電磁誘導の法則より

$$1次コイルに生じる逆起電力: V_{i1} = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$2次コイルに生じる誘導起電力: V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

逆起電力 V_{i1} と外部から加えた交流電圧 V_1 はつり合う ($|V_1| = |V_{i1}|$)
符合は気にせず、大きさだけ考えると

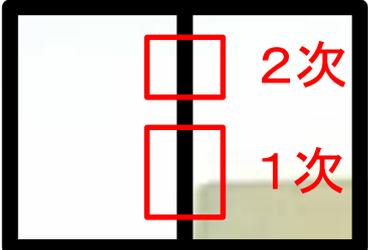
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{V_{i1}}{N_1} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$\frac{N_2}{V_1} \text{ を両辺にかけて } \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} \quad \left(V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1} \right)$$

巻き数の比 = 電圧の比

トランスの実物

鉄心



例: 8 巻
交流 8 V

交流 100 V
例: 100 巻

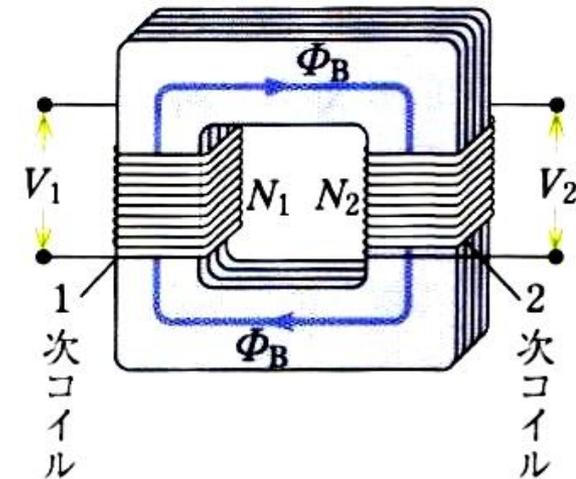
下側の 100 V が入力
で上側が出力として
使うことが一般的。
ダイオード等を使って
直流にして使用したりする。

逆に上側を入力として
下側を出力として
使うこともできる。

問題：右下のようなトランスにおいて 200 巻きの 1 次コイルに実効値 100 V の家庭用電源を接続した。2 次コイルの巻き数を 20 とすると 2 次コイルに生じる誘導起電力の実効値は何 V か？

$$V_2 = 100 \times \frac{20}{200} = 10 \quad \underline{10 \text{ V}}$$

問題：トランスの鉄心は、なぜ積層構造になっている？





変圧器(トランス)の鉄心など、コイルに交流が流される鉄心では、磁束変化による渦電流が流れ、渦電流損(発熱)が発生する(IHクッキングヒータと似ている)。電氣的に絶縁して成層した鉄心を用いると、渦電流損を大幅に低減できる。鉄心の損失にはヒステリシス損も関係するため、ケイ素鋼などヒステリシスの小さい材料が用いられる。

N 枚に分けると1枚当たりの誘導起電力は $1/N$ 、抵抗は N 倍、誘導電流は $1/N^2$
 ジュール熱 I^2R は、 $1/N^3$ 、合計のジュール熱は N 枚なので $1/N^2$

磁化曲線(ヒステリシスループ) 復習

すべての磁気モーメントが磁場の方向を向いている
磁化が飽和した状態(飽和磁化)

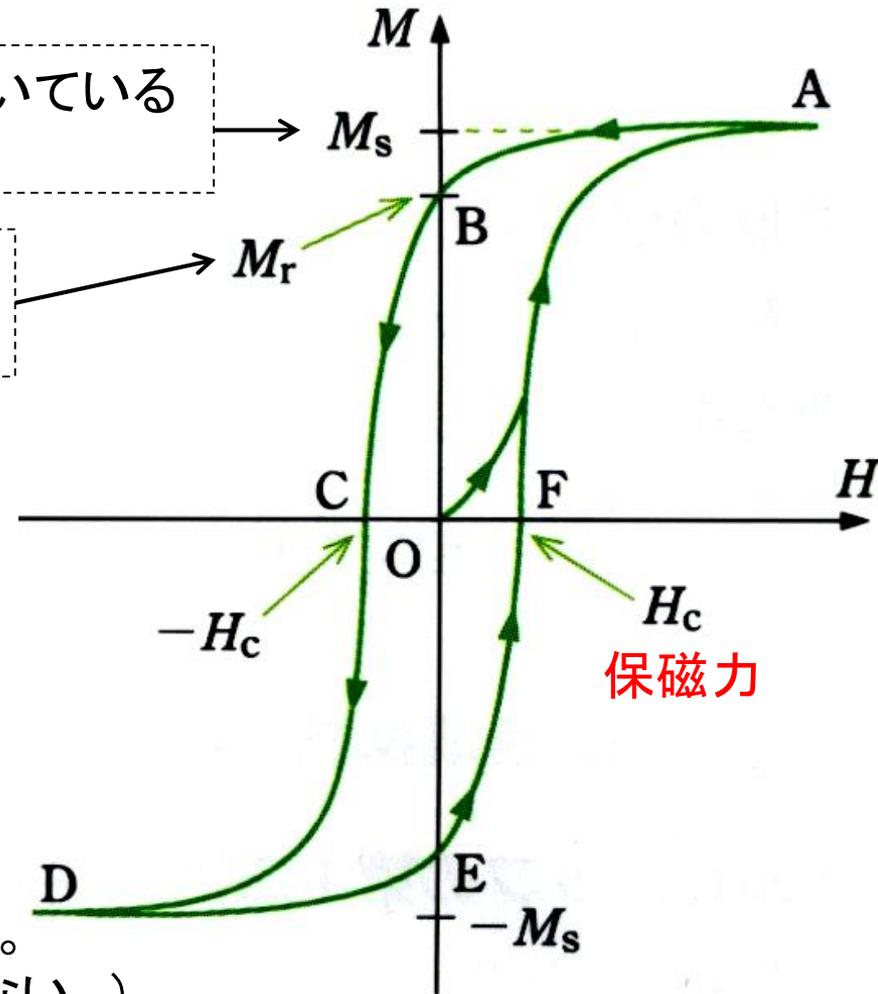
H を0にしたときに残っている磁化
残留磁化(永久磁石)

磁性体の材質等の違いより磁化曲線は
様々(ヒステリシスの大小等)

永久磁石の材料にはヒステリシスの
大きいもの(硬磁性材料)が良い。

変圧器(20章)の鉄心にはヒステリシスの
小さいもの(軟磁性材料)が良い

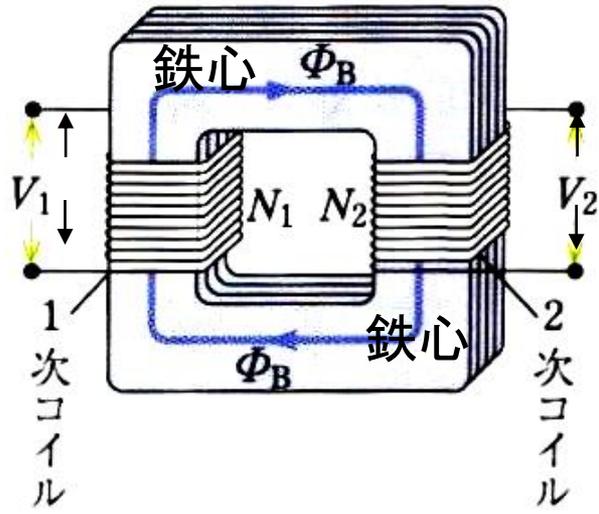
$M = \chi_m H$ は強磁性体では成り立っていない。
(右上のグラフで原点を通る直線になっていない。)



磁気ヒステリシス: ある磁場 H における磁化 M が過去の磁化の歴史に関係すること
例: 上の図で同じ $H = 0$ でも過去の違いで磁化は M_r であつたり $-M_r$ であつたりする。

変圧器(トランス)の問題

下のトランスの1次コイルを富山のコンセントに接続する。
 2次コイルには何もつながない。1次コイルの電気抵抗は0で
 自己インダクタンス L は 0.1 H とする。この時、1次コイルに流れる電流 I_e と
 1次コイル(トランス)の消費電力を求めよ。



RLC回路で $R \rightarrow 0, C \rightarrow \infty$ の極限を
 考えればよい。 $C = \infty$ のキャパシターは、
 導線と同等。

インピーダンス $Z = \omega L$

位相のずれ $\phi = 90^\circ$

力率 = 0

消費電力は $V_e I_e \times \text{力率} = 0$

電流 $I_e = V_e / Z = V_e / \omega L = V_e / (2\pi f L)$
 $= 100 / (2\pi \times 60 \times 0.1) \doteq 2.7 \text{ [A]}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

(遅れ)
 位相のずれ $\phi: \sin \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z}$ 力率 = $\frac{R}{Z}$

実際のトランスのコイルの抵抗は完全に0ではないし、鉄心に渦電流が流れたり、
 ヒステリシスによる損失もあり消費電力は0ではないが、かなり小さい。

(参考) 同調回路

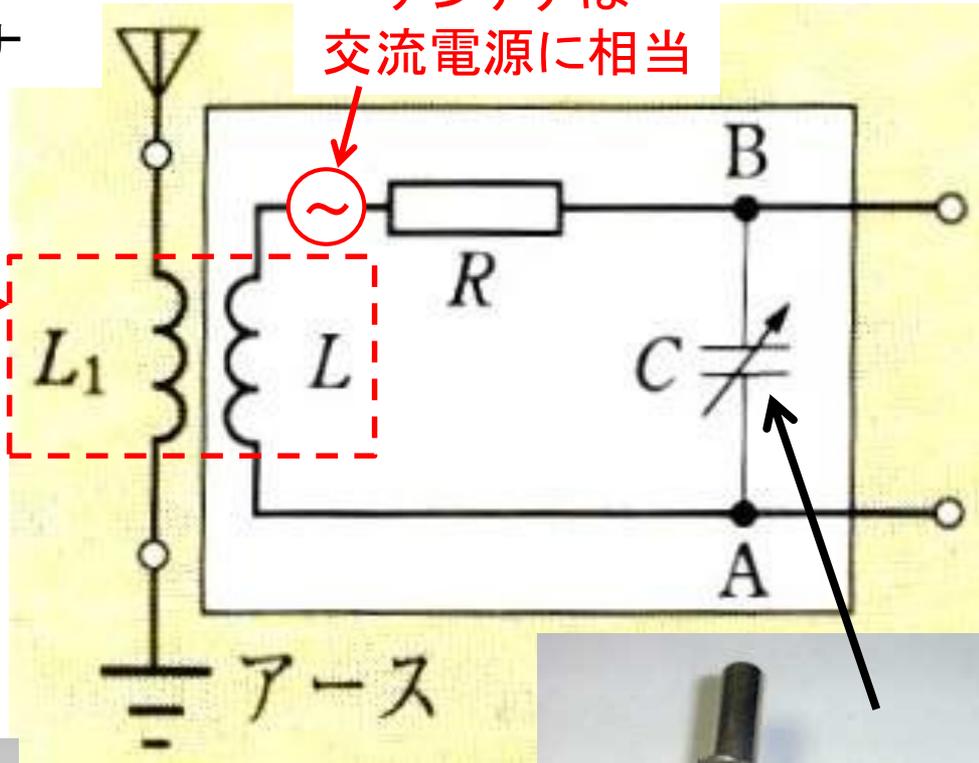
(RLC回路)

ラジオやテレビの受信機は、共振を利用して特定の周波数の放送を選び出す

アンテナ

アンテナは
交流電源に相当

トランス(変圧器)
と考える



ゲルマニウムラジオは
電池は必要ない。
電波のエネルギーで動作する。

variable
バリコン
可変コンデンサ

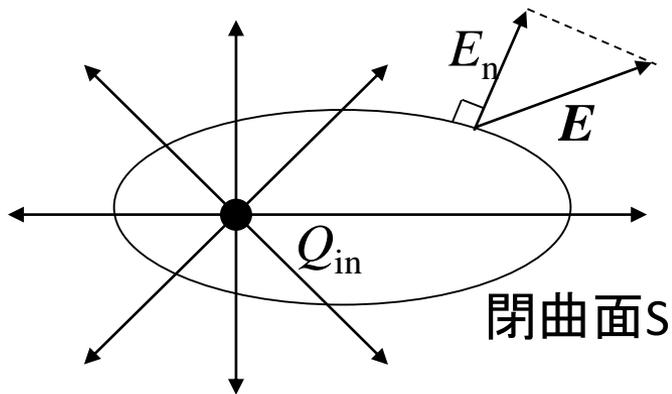


電磁気学は4つの方程式(マクスウェル方程式)にまとめることができる。

① 電場 E のガウスの法則

$$\iint_S E_n \, dA = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

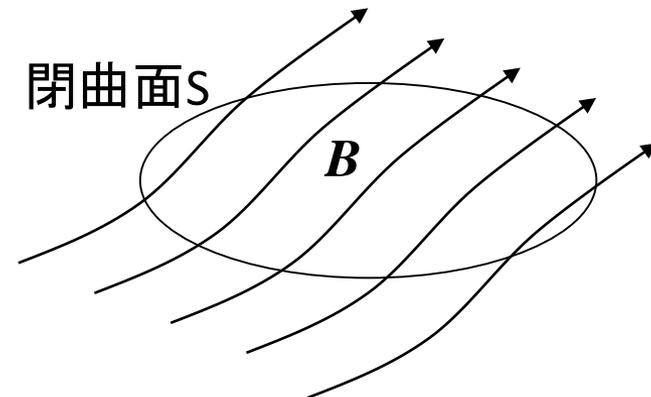
閉曲面 S から出てくる電気力線束 Φ_E は閉曲面の中の総電荷に比例する。



② 磁場 B のガウスの法則

$$\iint_S B_n \, dA = 0$$

閉曲面 S から出ていく磁束 Φ_B は 0 (磁荷は存在しないので)



磁荷が存在しないだけで、①と②は同じ形をしている
①と②が4つのマクスウェル方程式の内の2つ。

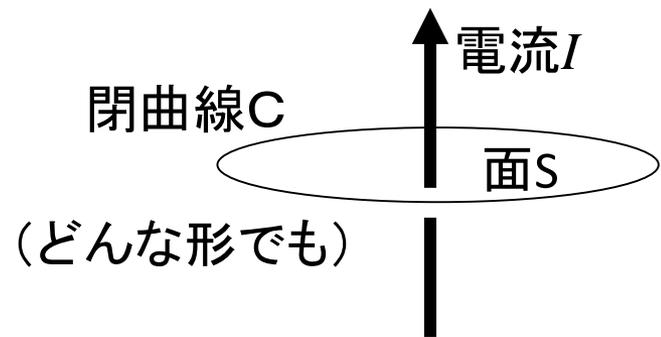
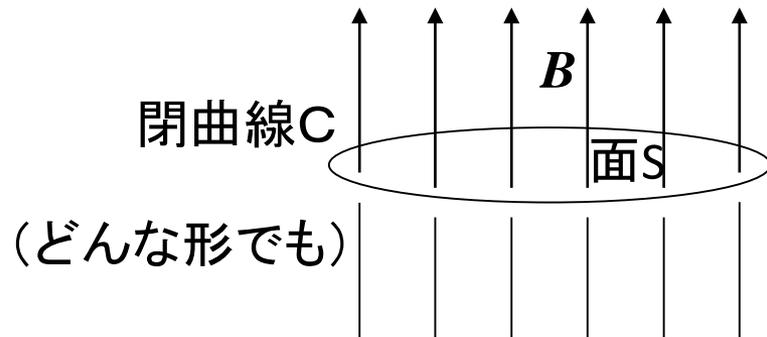
誘導起電力 V_i

$$\textcircled{3} \quad \oint_C E_t ds = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \iint_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

E_t は閉曲線C上の電場 E の接線方向成分

$$\textcircled{4} \quad \oint_C B_t ds = \mu_0 I + \text{今日説明する項}$$

B_t は閉曲線C上の磁場 B の接線方向成分

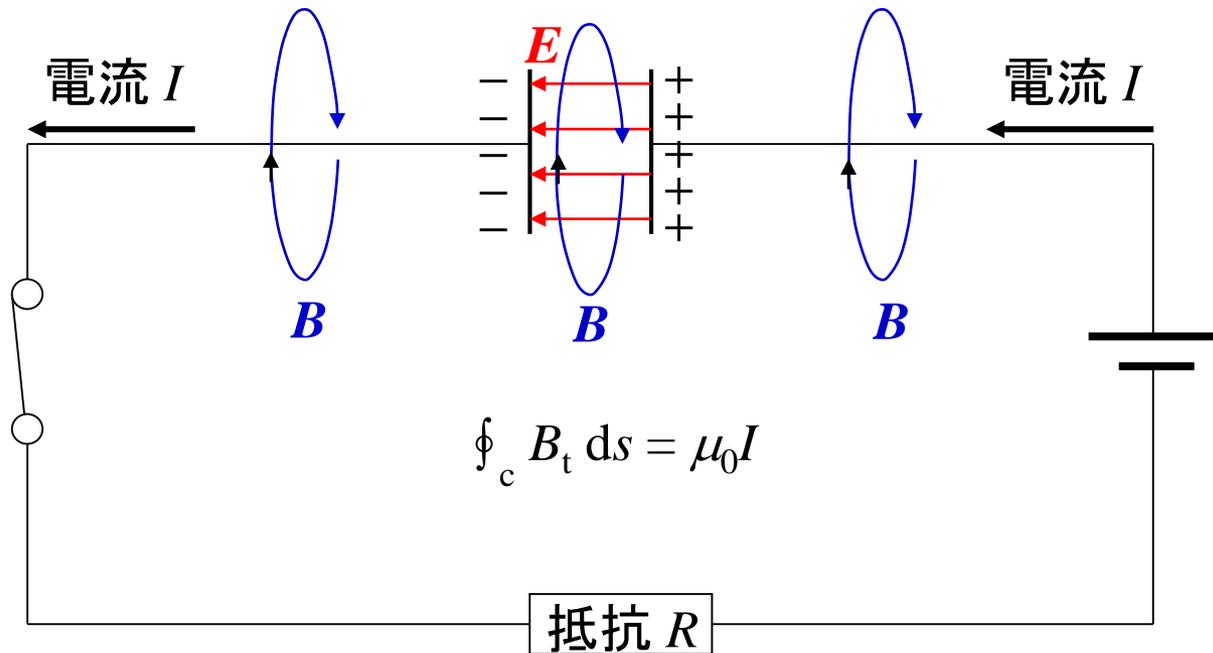


マクスウェル方程式のうちの3つ(①②③)と残り1つの半分(④)をすでに勉強した。これから勉強する項を④に加えると、③と④は、①と②と同様に対称的なものになる。

アンペールの法則は電場が時間的に変化する場合成り立たない。

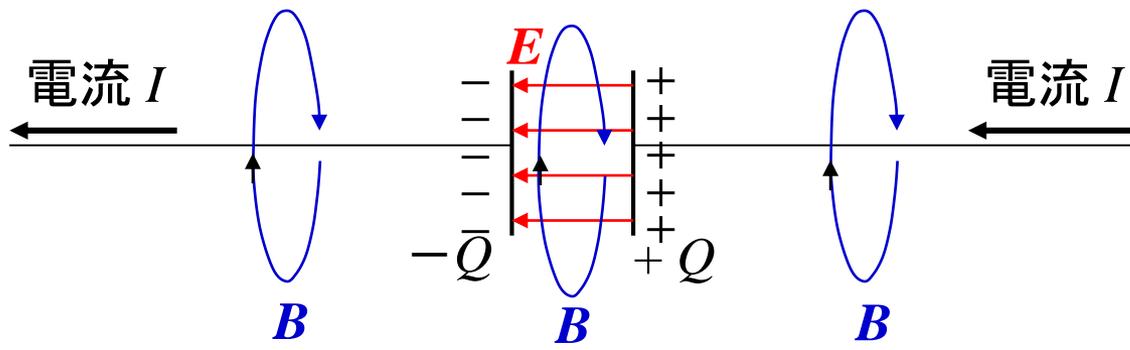
⑫

下の図の3ヶ所の磁場は、同じであることが実験的に確かめられている。
キャパシターの部分は電流 0 なのでアンペールの法則は成り立っていない。



充電中のキャパシター

極板間の電場 E は時間とともに大きくなっている。
「電場の変化が磁場(誘導磁場)をつくる。」とすれば良さそう。
(対応)磁場の変化が電場(誘導電場)をつくる。



極板の電荷 Q と電流 I の関係は、 $I = \frac{dQ}{dt}$

電場のガウスの法則より電荷 Q からは $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本の電気力線が発生しているので、

$$\text{極板間の電気力線束 } \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad Q = \epsilon_0 \Phi_E$$

$$\text{よって } I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

つまり、 $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ は電流 I と同等(同様に磁場をつくる)とすればよい。

よってアンペールの法則を以下のように修正すればよい。

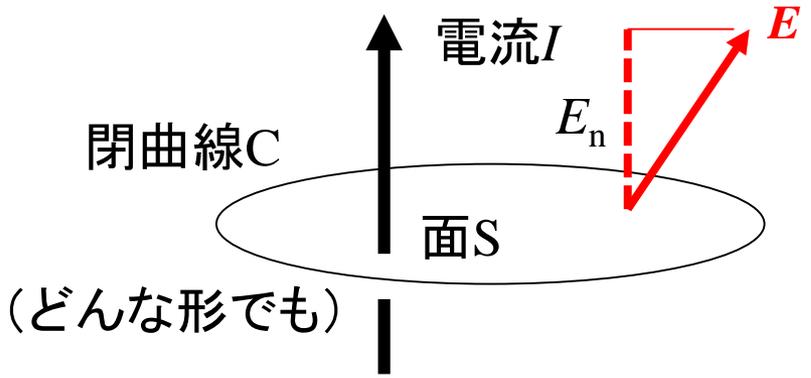
$$\oint_c B_t ds = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

$$\oint_c B_t ds = \mu_0(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

磁束 Φ_B の変化が誘導電場を生じたように電気力線束 Φ_E の変化が誘導磁場を生じる。

誘導電場の電気力線が閉曲線だったように誘導磁場の磁力線も閉曲線

(磁力線はすべて閉曲線)



閉曲線 C を縁とする面 S を貫く電気力線束は

$$\Phi_E = \iint_S E_n dA \text{ なので}$$

$$\oint_c B_t ds = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

マクスウェル-アンペールの法則
(マクスウェル方程式の④式)

電場 E は位置の関数でもあるので偏微分になっている。

③ファラデーの電磁誘導の法則

④マクスウェル-アンペールの法則

$$\oint_c E_t ds = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \iint_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$$

$$\oint_c B_t ds = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$$

電流 I は電荷の流れである。
磁荷は存在しないので、
ファラデーの電磁誘導の法則には
磁荷の流れに対応する項がない。

$\mu_0 \epsilon_0$ は定数である。この値は
単位のとり方によって変わってくる。
 $\mu_0 \epsilon_0$ が1となる(上の式に現れなくなる)
単位系を選択することもできる。
よって、 $\mu_0 \epsilon_0$ の存在は、③式と④式の
対称性を否定するものではない。
符号も正の向きの決め方による。

ちなみに $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{c^2}}$ c は光速
(3.0×10^8)

例: 長さの単位のメートルは、
その大きさである必然性は何もない。

よってマクスウェル方程式の③式と④式は対称的である。
見かけの違いは磁荷が存在しないことと、人間が勝手に選んだ単位系による。

マクスウェル方程式

① 電場 E のガウスの法則

$$\iint_S E_n \, dA = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

② 磁場 B のガウスの法則

$$\iint_S B_n \, dA = 0$$

③ ファラデーの電磁誘導の法則

$$\oint_c E_t \, ds = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \iint_S \frac{\partial B_n}{\partial t} \, dA$$

④ マクスウェル-アンペールの法則

$$\oint_c B_t \, ds = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial E_n}{\partial t} \, dA$$

電場と磁場に対する4つの基本法則。力学における $ma = F$ のようなもの。

最終目標に達したので
ここから先は
割愛した部分、
これまでの補足、
練習問題等

(復習)

(Hall)

金属の場合、電流を担っているのは **自由電子** である。

自由電子

半導体の場合、
電流を担っているのは

自由電子

と

正孔

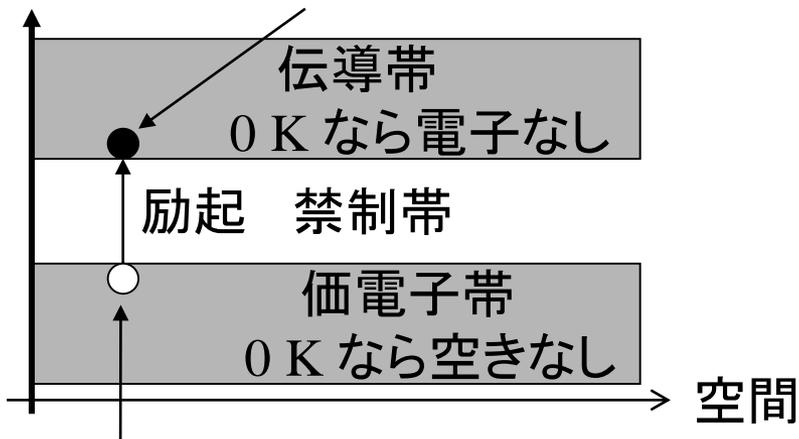
である。

(伝導電子)

(ホール, hole)

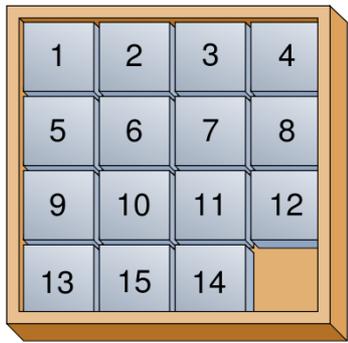
半導体中の
電子の
エネルギー

自由に動きまわれる
自由電子(伝導電子)



正孔(ホール): 電子の空き

正孔の
イメージ



15パズルに似ている。16枚のピースが入っていると身動きがとれないが、1枚抜くと、空き(正孔)はピース(価電子)が移動することで移動できる。実際に動くのは、価電子だが正孔は正の電荷の粒子のようにふるまう。