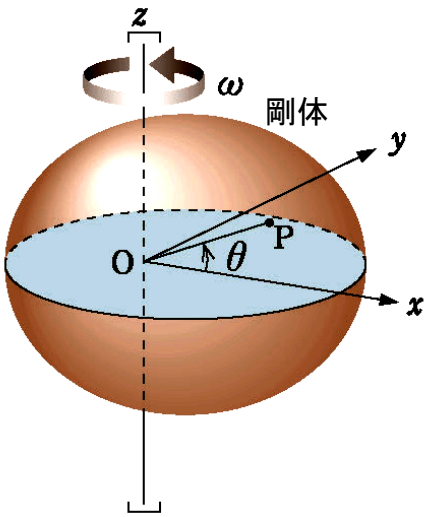
Q & A

Q: 期末テストの範囲はどこまででですか？中間テストの範囲も含まれますか？
A: 9章までか、10章も入るか、今後の進行次第です。主に中間試験の範囲以降から出題しますが、中間試験の範囲も含まれると思って下さい。（積み重ねですので、中間試験の範囲がわかっていないと、その後の理解も難しいと思います。）

一般的な剛体の場合

角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$



剛体が軸受けによって左の図のように z 軸に固定されており、
z 軸のまわりを角速度 ω で回転している。

剛体は、微小な体積要素の集合体
i 番目の体積要素の角運動量は、

$L = pd = mvl = ml^2\omega$
$v = l\omega$

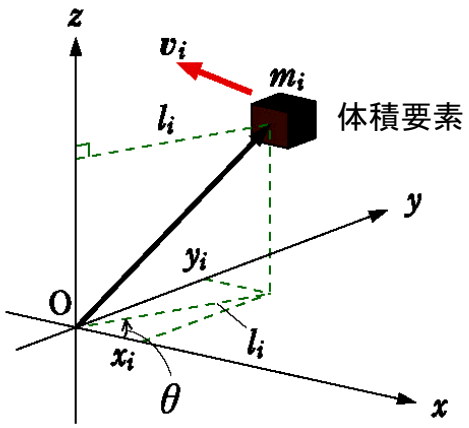
$L_i = m_i l_i^2 \omega$

$l_i = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$

$l_i^2 = (x_i^2 + y_i^2)$

$L_i = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega$ z 軸は回転軸

剛体全体の角運動量 L は、



$$L = \sum_i m_i l_i^2 \omega = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega$$

$L = I\omega$ とおくと

$$I = \sum_i m_i l_i^2 = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$ z 軸は回転軸

I をこの剛体の回転軸まわりの［　　］と呼ぶ

各体積要素の質量 m_i に
回転軸からの距離 l の2乗をかけて
すべて足したもの

固定軸まわりの剛体の回転運動の法則

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

$L = I\omega,\ \ \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

剛体の回転運動の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i l_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i l_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$v = l\omega$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

固定軸まわりの剛体の回転運動と質点の直線運動との対応

剛体の回転運動の法則: $\dfrac{dL}{dt} = I\dfrac{d\omega}{dt} = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = N\ (= I\alpha)$　　$L = I\omega$　　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

質点の(直線)運動の法則: $\dfrac{dp}{dt} = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F\ (= ma)$　　$p = mv$　　$v = \dfrac{dx}{dt}$

剛体の回転運動	質点の直線運動
慣性モーメント I	質量 m
角位置 θ	位置 x
力のモーメント N	力 F
角速度 ω	速度 v
角加速度 α (ギリシャ文字 アルファ)	加速度 a
角運動量 $L = I\omega$	運動量 $p = mv$

対応させて理解しよう(回転運動の式を忘れても、対応関係より求めることができる)

例: 角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ ⇔ 加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

慣性モーメント I : 回転しにくさ ⇔ 質量 m : 動きにくさ

慣性モーメントが大きいほど回転しにくい　　質量が大きいほど動きにくい

慣性モーメントは、イメージしにくい物理量だが、直線運動における質量に対応するものと考えるとイメージしやすい。

同じ力のとき、質量 m が2倍になると、加速度は半分になった。
同じ力のモーメントのとき、慣性モーメントが2倍になると、角加速度は半分になる。

対応関係を使って得られる剛体の回転運動に関する物理量の例

剛体の回転運動	質点の直線運動	
運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2} I\omega^2$	運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2} mv^2$	単位も同じ J
仕事 $W = N\theta$	仕事 $W = Fx$	J
仕事率 $P = N\omega$	仕事率 $P = Fv$	W
1秒あたりの仕事, 1秒にω rad 進む	1秒あたりの仕事, 1秒にv m 進む	

モーター, エンジンの仕事率(パワー) ‖ 力のモーメント × 角速度 (トルク × 回転数 × 2π)

剛体の回転運動に関するこれらの物理量の式を忘れても(知らなくても)、
質点の直線運動との対応関係より簡単に求めることができる。

対応関係の練習問題
以下はプリウスのエンジンのデータである。

■エンジン	
型式	2ZR-FXE
総排気量L	1.797
種類	水冷直列4気筒DOHC
使用燃料	無鉛レギュラーガソリン
最高出力＜ネット＞ kW（PS）　（仕事率・パワー）	73（99）（@r.p.m=5,200）
最大トルク＜ネット＞ N・m（kgf・m）　（力のモーメント）	142（14.5）（@r.p.m=4,000）

最近はエンジンの性能にも主に国際単位系（MKS単位系）が使われている

PS:馬力

kgf:
キログラム重

問題①：r.p.m. とは、rotation per minute の略である。毎分4000回転の場合、回転数 f と角速度 ω はいくらか。（有効桁3桁で）

問題②：エンジンにギアなどを介さず、半径 50 cm のタイヤを直接とりつけた場合、タイヤ表面でどれだけの力が出せるか。毎分4000回転の最大トルクの条件で答えよ。（有効桁3桁で）

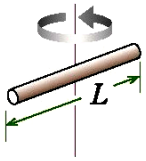
問題③：上の設定で車が走っているとした場合、車の速度を以下の2つの単位で求めよ。（有効桁3桁で）
実際にはこの設定では空気抵抗等のため走れませんが、抵抗が軽減されている状況で走れているとする。

＿＿＿＿＿＿ m/s,　＿＿＿＿＿＿ km/h

問題④：上の設定におけるエンジンの仕事率（出力）を問題①～③の結果を用いて求めよ（有効桁3桁で）。直線運動と回転運動の2つの方法で求めることができる。

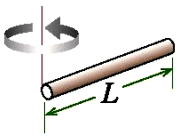
慣性モーメントの計算例 p99

（これらを記憶する必要はありません。必要な時に本を見ればよい）



細長い棒

$$I_G = \frac{1}{12}ML^2$$

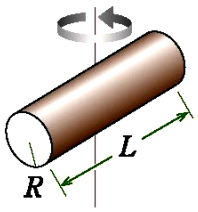


細長い棒

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

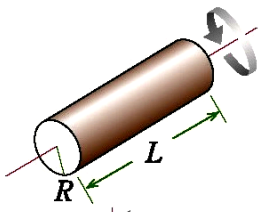
線は回転軸
Mは剛体の質量

I_G は回転軸が
重心を通る場合
I は回転軸が
重心を通らない場合



円柱

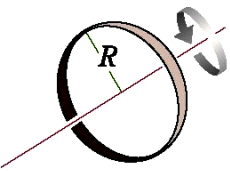
$$I_G = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}MR^2$$



円柱（円板）

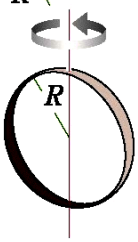
$$I_G = \frac{1}{2}MR^2$$

同じ剛体でも回転軸の
位置や向きが異なれば
慣性モーメントは異なる



円環

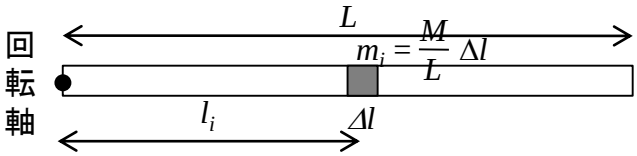
$$I_G = MR^2$$



円環

$$I_G = \frac{1}{2}MR^2$$

問題：細長い棒の端を回転軸とした場合（上の図の右上）の慣性モーメント I を計算せよ。



全体の質量：M，単位長さあたりの質量：$\frac{M}{L}$

$$I = \sum_i m_i l_i^2$$

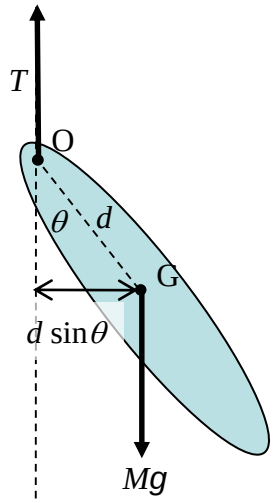
問題：上の図にある公式を使って、質量が 3 kg 半径が 50 cm のリムの慣性モーメントを計算せよ。
スポークや軸は無視してリムは円環として計算せよ。またリムの回転数 f が 2 /s のとき、
リムの回転運動の運動エネルギーを求めよ。（実物参照）

公式の解説：円環（図の左下）はすべての質量が回転軸から距離 R の位置にある。⇒ $I = \Sigma m_i l_i^2 = \Sigma m_i R^2 = MR^2$

問題：上の回転しているリム（リムの重心）が ① 2 m/s（ 7.2 km/h 早歩き程度）で等速直線運動しているときリムの全運動エネルギーを求めよ（実演参照）。また、②自転車走行時のように、上のリムの重心が円環部分の回転の速さで運動している（接地部分のリムの速度は0 ）場合の全運動エネルギーはいくらか？

例4　剛体振り子 p98

水平な固定軸のまわりに自由に回転でき、重力の作用によって振動する剛体



[実演参照]

剛体に働く外力：①剛体に作用する重力 Mg
②固定軸 O に作用する軸受けの抗力 T

固定軸 O のまわりの外力のモーメントを求める

②抗力 T のモーメントは 0（作用線がOを通るので）
①重力 Mg のモーメントは $-Mgd\sin\theta$

剛体の回転運動の法則

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

L：固定軸 O のまわりの剛体の角運動量
I：固定軸 O のまわりの剛体の慣性モーメント

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd\sin\theta$$

力のモーメントは θ と逆向き

振れの角 θ が小さいときの近似 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\,\theta$$

$\omega = 2\pi f$

$$f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

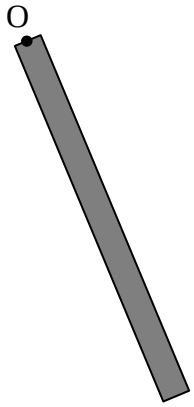
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{Mgd}{I}}$ とおくと $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ （単振動の式）

$$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \beta)$$

単振り子の場合は $\omega = \sqrt{g/L}$

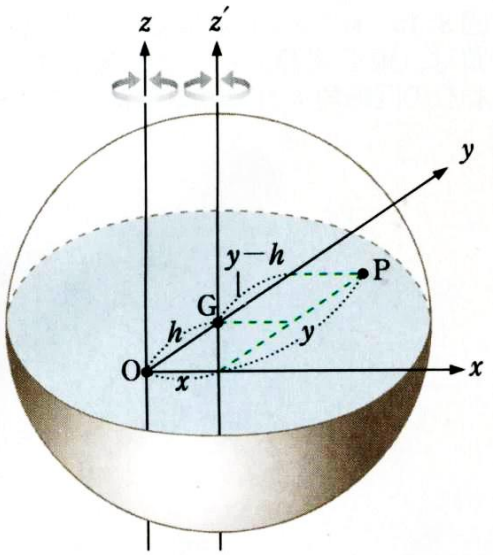
例4：長さ 72 cm の棒の一端を持って、鉛直面内で振動させるときの振動の周期を求めよ。
また、この剛体振り子の周期は、何 cm のひもの長さの単振子の周期と同等か？
ただし、棒は十分に細長いものとし、図8.11の細長い棒とみなせるとする。図8.11の公式を用いてもよい。



実験で確認

l^2の平均だから$L/2$にならずに
$2L/3$になる。

平行軸の定理



剛体の**重心**を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを I_G とする。

その回転軸と平行で h 離れた軸のまわりの慣性モーメント I は

$$I = I_G + Mh^2$$ （Mは剛体の質量）

証明：左の図のように座標軸を選ぶ

$$I = \sum_i m_i l_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

I_G をくくり出す

$$= \sum_i m_i \{x_i^2 + (y_i - h)^2 + 2hy_i - h^2\} \quad (y_i^2 - 2hy_i + h^2)$$

$$= \sum_i m_i \{x_i^2 + (y_i - h)^2\} + 2h\sum_i m_i y_i - h^2 \sum_i m_i$$

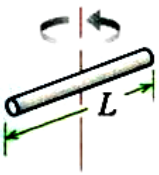
$$= I_G + 2h(Mh) - Mh^2$$

$$= I_G + Mh^2$$

重心の y 座標：$\dfrac{\sum_i m_i y_i}{M} = Y = h$

$$\sum_i m_i y_i = Mh$$

問題：平行軸の定理を用いて下の図の左の公式から、右の公式を導け



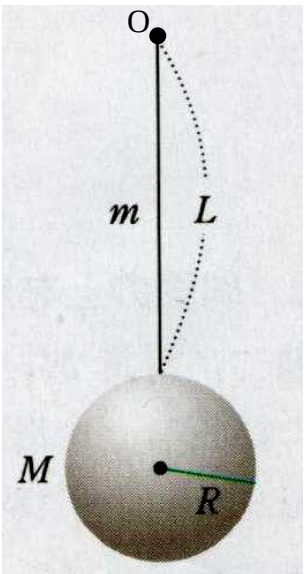
細長い棒

$$I_G = \frac{1}{12} ML^2$$

細長い棒

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

ボルタの振り子



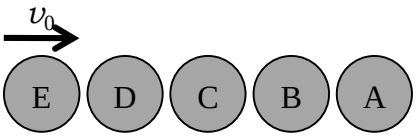
半径 R，質量 M の金属球を，長さ L，質量 m の細い針金で吊るした振り子をボルタの振り子という。

問題：この振り子全体を剛体とみなして、
針金の先端Oのまわりの慣性モーメントを計算せよ。
P97（図8.10）の公式を用いてよい。ヒント：平行軸の定理を用いよ。

ニュートンのゆりかごの問題の解説

問題：質量 $9m$ の金槌でたたいたらどうなるか（球の質量は m ）

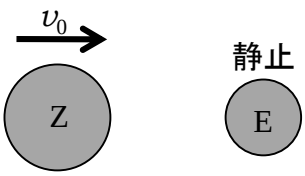
ニュートンのゆりかごの球の衝突は、球と球の間が少し空いていて、衝突が連続して起こっていると理解できる。

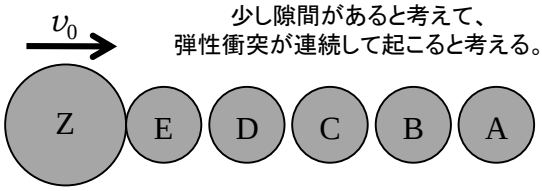


① 球Eが球Dに速度 v_0 で衝突すると、球Eは静止し、球Dの速度は v_0 となる。
② 球Dが球Cに速度 v_0 で衝突すると、球Dは静止し、球Cの速度は v_0 となる。
③ 球Cが球Bに速度 v_0 で衝突すると、球Cは静止し、球Bの速度は v_0 となる。
④ 球Dが球Bに速度 v_0 で衝突すると、球Bは静止し、球Aの速度は v_0 となり飛び出していく。

金槌の問題は、上の例と同様に衝突を一つづつ、見ていけば何が起こるかわかる。
金槌を質量 $9m$ の球として最初の衝突を考えてみる。

問題：静止している質量 m の球Eに質量 $9m$ の球Zが速度 v_0 で正面衝突する。
衝突は弾性衝突として、衝突後の球Eの速度 v_E と球Zの速度 v_z を求めよ。





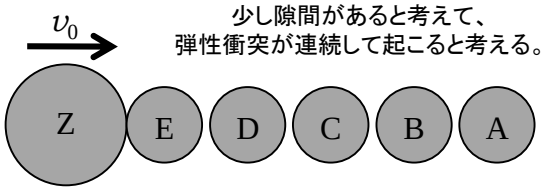
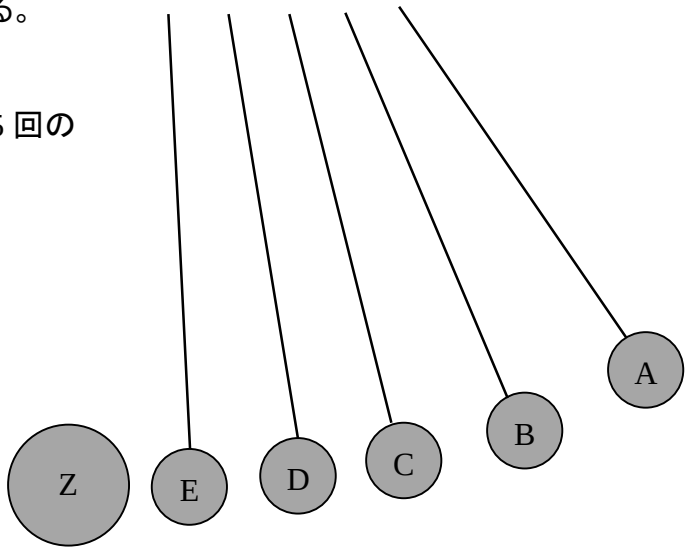
球Zが球Eに速度 v_0 で衝突すると、球Zは速度 $0.8v_0$ となり、球Eの速度は $1.8v_0$ となる。
① 球Eが球Dに速度 $1.8v_0$ で衝突すると、球Eは静止し、球Dの速度は $1.8v_0$ となる。
② 球Dが球Cに速度 $1.8v_0$ で衝突すると、球Dは静止し、球Cの速度は $1.8v_0$ となる。
③ 球Cが球Bに速度 $1.8v_0$ で衝突すると、球Cは静止し、球Bの速度は $1.8v_0$ となる。
④ 球Bが球Aに速度 $1.8v_0$ で衝突すると、球Bは静止し、球Aの速度は $1.8v_0$ となり飛び出していく。

衝突はこれで終わりではない。球Zは動いているので、また静止している球Eに衝突する。

2回目の球Zと球Eの衝突は、衝突速度が 0.8 倍となっているだけでで、後の条件は変わらない。よって先ほどの計算結果を 0.8 倍すればよい。

球Zが球Eに速度 $0.8v_0$ で衝突すると、球Zは速度 $0.64v_0$ となり、球Eの速度は $1.44v_0$ となる。
① 球Eが球Dに速度 $1.44v_0$ で衝突すると、球Eは静止し、球Dの速度は $1.44v_0$ となる。
② 球Dが球Cに速度 $1.44v_0$ で衝突すると、球Dは静止し、球Cの速度は $1.44v_0$ となる。
③ 球Cが球Bに速度 $1.44v_0$ で衝突すると、球Cは静止し、球Bの速度は $1.44v_0$ となり飛び出していく。
（球Aは、すでに飛び出していったので、今回はない。）

衝突はこれで終わりではない。球Zは動いているので、また静止している球Eに衝突する。
以下同様、結局以下のようになる。



球Aは速度 $1.8\ v_0$ で飛び出す。
球Bは速度は $1.44v_0$ で飛び出す。
球Cは速度は $1.152v_0$ で飛び出す。
球Dは速度は $0.9216v_0$ で飛び出す。
球Eは速度は $0.73728v_0$ で飛び出す。
すべての衝突後の金槌の速度は、$0.32768v_0$ である。
5個の球は、異なる速度で飛び出していき、
ある時間が経った後は、下の図のようになっている。
衝突は一瞬だが、この一瞬のうちに $5+4+3+2+1 = 15$ 回の衝突が起こってこのようになっていると理解できる。