CIP 法(Cubic interpolated propagation)

対流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

を x で微分すると，

$$\frac{\partial g}{\partial t} + c\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t} + c\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \qquad g = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2)$$

となる．2 つのメッシュ i, i-1 間のプロファイルを，

$$\mathrm{U}_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \qquad (3)$$

のように 3 次多項式で表せば，

$$\mathrm{U}_i(x_i) = d_i = u_i \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}_i(x_i)}{\partial x} = c_i = g_i \qquad (5)$$

$$\mathrm{U}_i(x_{i-1}) = -a_i\Delta x^3 + b_i\Delta x^2 - c_i\Delta x + d_i = u_{i-1} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}_i(x_{i-1})}{\partial x} = 3a_i\Delta x^2 - 2b_i\Delta x + c_i = g_{i-1} \qquad (7)$$

となる．ここで，(6)～(7)より，

$$a_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D^2} + \frac{2(u_i - u_{iup})}{D^3} \qquad (8)$$

$$b_i = \frac{3(u_{iup} - u_i)}{D^2} - \frac{2g_i + g_{iup}}{D} \qquad (9)$$

と求まる．ただし，

$$\begin{aligned} &c \geq 0: \quad D = -\Delta x, \quad iup = i - 1 \\ &c < 0: \quad D = \Delta x, \quad iup = i + 1 \end{aligned} \qquad (10)$$

である．

次の時刻 n+1 の値は，このプロファイルを，$c\Delta t$ だけ移動したもの，

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= U(x - c\Delta t) \\ g^{n+1} &= \frac{\partial U(x - c\Delta t)}{\partial x} \end{aligned} \qquad (11)$$

で与えられる．具体的には，

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_i^{n+1} &= a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i^n\xi + u_i^n \\ \mathrm{g}_i^{n+1} &= 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i^n \end{aligned} \qquad (12)$$

である．ここで，$\xi = -c\Delta t$ である．