# Analysis of dynamical chiral symmetry breaking and its phase transition using the weak solution method of the non-perturbative renormalization group equation

佐藤大輔　金沢大理

共同研究者:

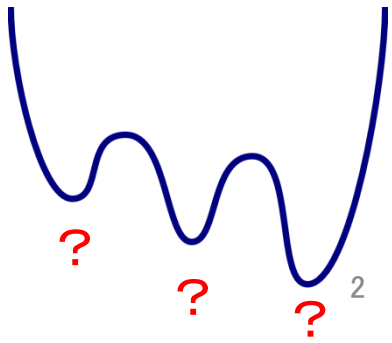
青木健一，熊本真一郎[A]

金沢大数物，金沢大自然[A]

北陸信越地区　素粒子論グループ研究会
2013年5月　立山青少年自然の家

# Introduction

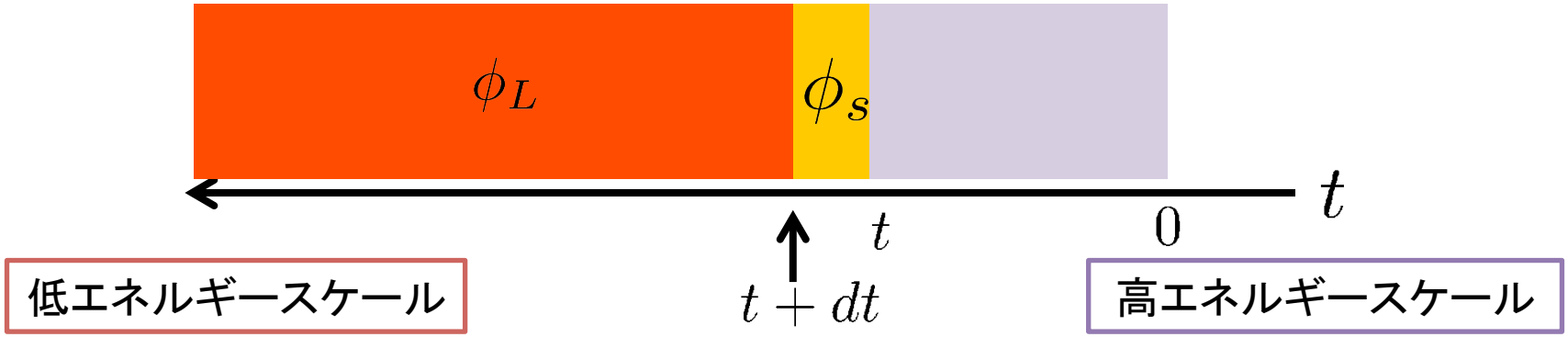
- QCDにおけるカイラル対称性の力学的破れが大きなハドロン質量の起源になっている.
- 高密度QCDでの問題
  - 格子QCDシミュレーションの符号問題により第一原理計算が難しい.
  - Schwinger-Dyson方程式は梯子近似が必要. 物理量がゲージ固定に強く依存する.
- 非摂動くりこみ群(Non-Perturbative Renormalization Group, NPRG)方程式
  - これらの手法に対して相補的な方法.
  - メソン場を導入せずに, クォーク場の自由度のみだと偏微分方程式に特異性が現れる.
  - 有限密度一次相転移においてくりこみ群方程式は真の安定状態を選択するのか.
- 弱解の方法によって克服する.



# 非摂動くりこみ群(NPRG)

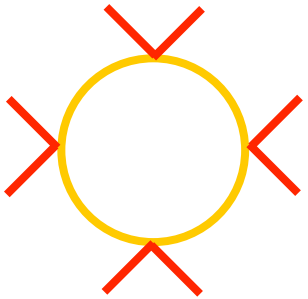
運動量切断スケール$\Lambda(t)$に対する有効作用$S\downarrow eff[\phi;t]$の応答を見る.

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-t}$$




$$\int \mathcal{D}\phi_{\mathrm{s}} e^{-S_{\mathrm{eff}}[\phi_{\mathrm{s}},\phi_{\mathrm{L}},t]} = e^{-S_{\mathrm{eff}}[\phi_{\mathrm{L}},t+dt]}$$

新たに生成される有効相互作用
1-loop ダイアグラムで尽きる



NPRG方程式：有効作用についての（汎関数）偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{\mathrm{eff}}[\phi;t] = \beta\left[\frac{\delta^2 S_{\mathrm{eff}}}{\delta\phi^2};t\right]$$

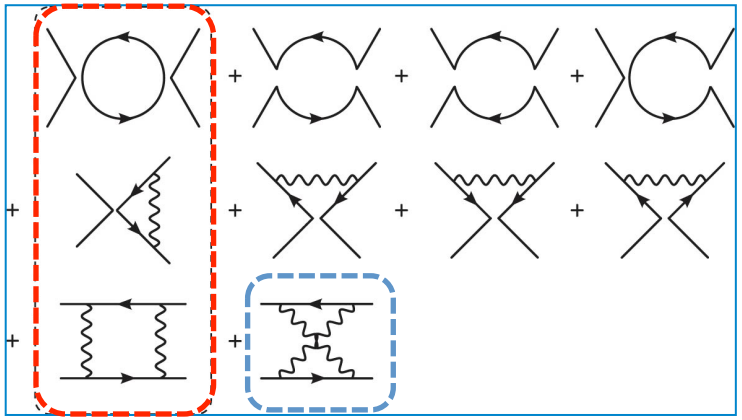
# カイラル対称性の力学的破れとNPRG

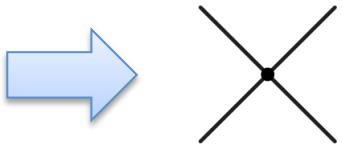
- 有効作用

$$S_{\mathrm{eff}}[\Phi;\Lambda]=\int_x\left\{\frac{Z_F}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a+\frac{1}{2\xi}\left(\partial A_\mu\right)^2+\bar{\psi}\left(Z_\psi\partial\!\!\!/+i\bar{g}_s A\!\!\!/\right)\psi-V(\psi,\bar{\psi};t)\right\}$$

フェルミオンポテンシャル $V(\psi,\bar{\psi};t)$ : クォークの多体相互作用

- 4-fermi相互作用の生成





4-fermi相互作用がゲージ相互作用によって生成され，NJL模型にあるようにカイラル対称性の力学的破れを引き起こす．

- テーラー展開

$$V(\psi,\bar{\psi};t)=\frac{G_2}{2}\left((\bar{\psi}\psi)^2-(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right)+\frac{G_V}{2}\left((\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2+(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2\right)+\frac{G_4}{4}\left((\bar{\psi}\psi)^2-(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right)^2+\cdots$$

今回は4-fermi相互作用のみを持つ南部-Jona-Lasinio模型を考える．

# QCD有効模型

- 南部—Jona-Lasinio (NJL) 模型
  (simplified discrete chiral version)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} = \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi + \frac{G_0}{2} (\bar{\psi}\psi)^2$$

- カイラル対称性

$$\psi \Longrightarrow \gamma_5 \psi \ , \quad \bar{\psi}\psi \Longrightarrow -\bar{\psi}\psi$$

  – 質量項を禁止

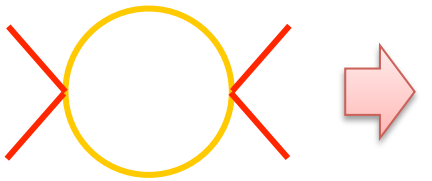
$$m\bar{\psi}\psi$$

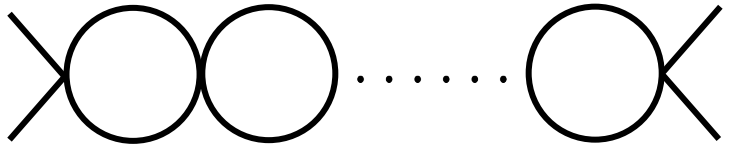
- 強結合 ( $G_0 \Lambda_0^2 > 4\pi^2$ )で質量が自発的に生成される（カイラル対称性の自発的破れ）.

# 4-fermi結合定数の発散

- 4-fermi結合定数のRG方程式 $g_2 \equiv G_2\Lambda^2/4\pi^2$

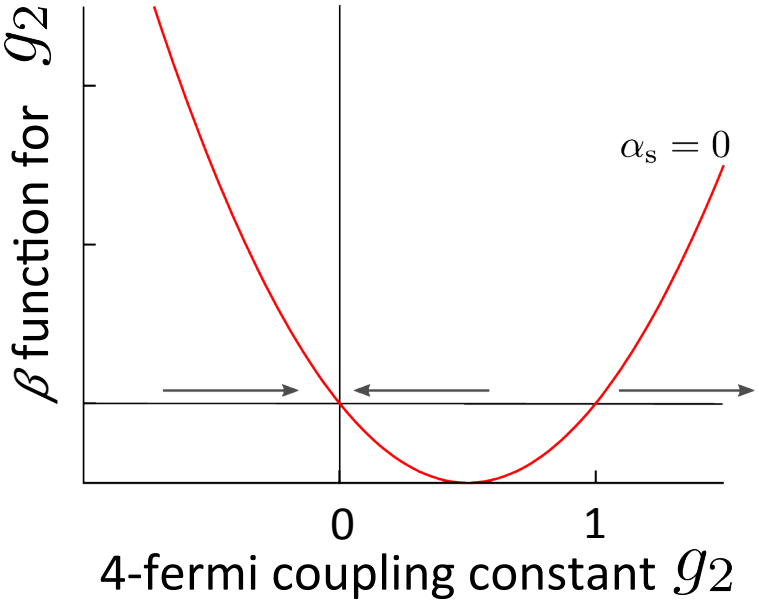
$$\frac{dg_2}{dt} = -2g_2 + 2{g_2}^2$$





無限個のダイアグラムの和と一致

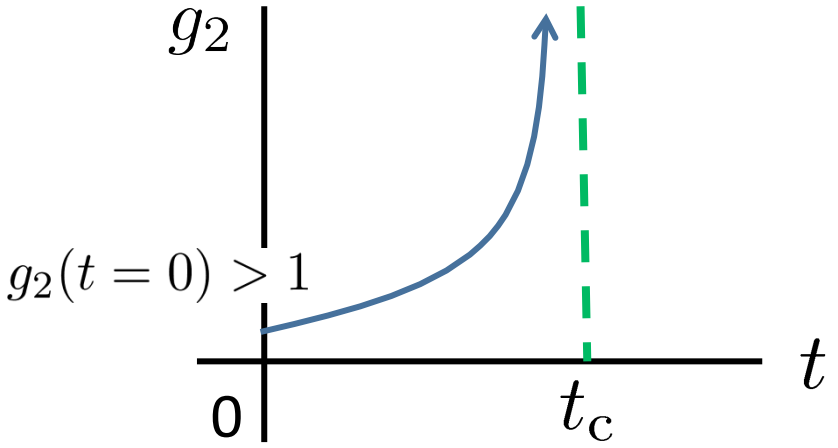
対称性により高次の結合定数に依らず，閉じている.




- 解の爆発

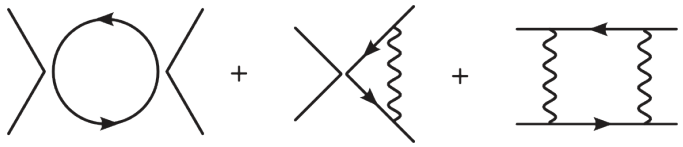
4-fermi結合定数が有限スケール$t_c$で発散:

$$g_2(t \to t_c) \to \infty$$

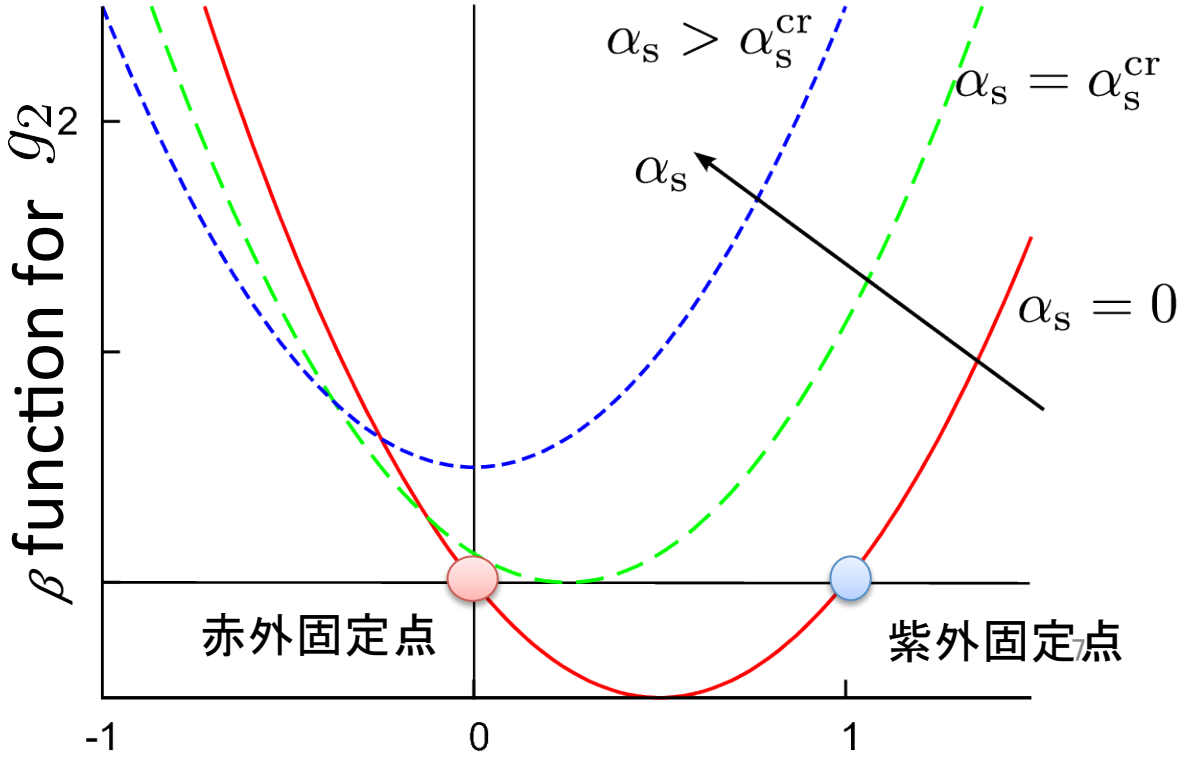


# QCDの場合

$$\frac{dg_2}{dt} = -2g_2 + 2\left(g_2 + \frac{3}{4\pi}\alpha\right)^2$$



$\beta$関数

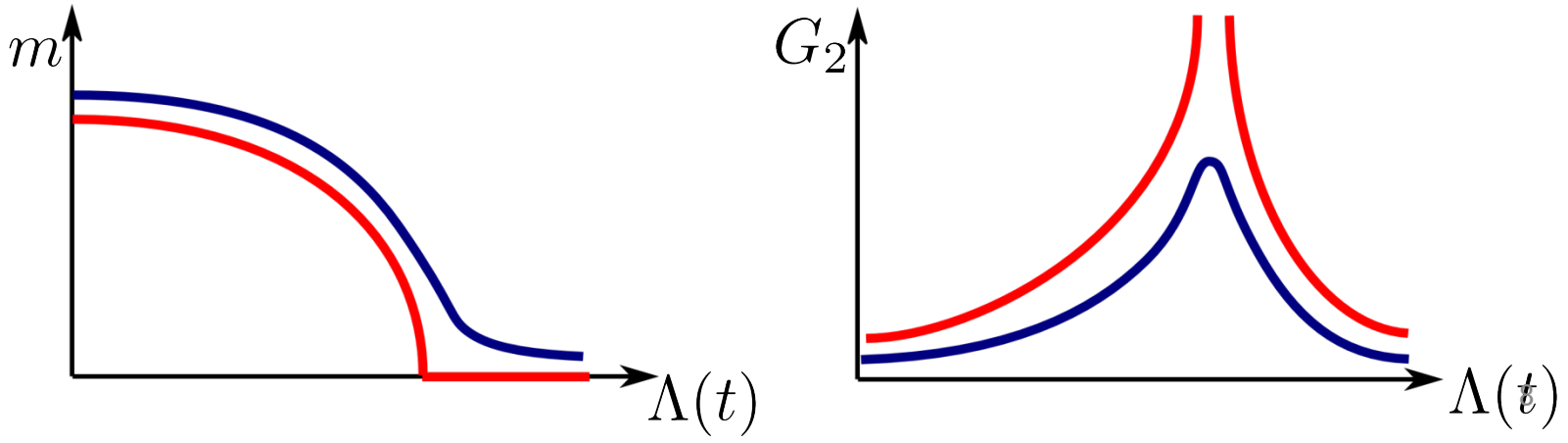



$$\alpha^{cr} = \frac{\pi}{3}$$

K.-I. Aoki, K.-I. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao, M. Tomoyose (1997, 1999)

# 2次相転移との類似

- 4-fermi結合定数$G\downarrow 2$ はカイラルゆらぎ $G_2 \sim \langle \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi \rangle$
  - $G\downarrow 2$ は外場感受率$\chi$と見なせる.
  - 自発的質量生成は切断スケール$\Lambda(t)$に対する2次相転移
- 対称性を破る裸の質量$m\downarrow 0$を導入する $V(\psi,\bar{\psi})|_{\rm chiral} + m_0\bar{\psi}\psi$
  - 裸の質量によって特異性が鈍される(Crossover).

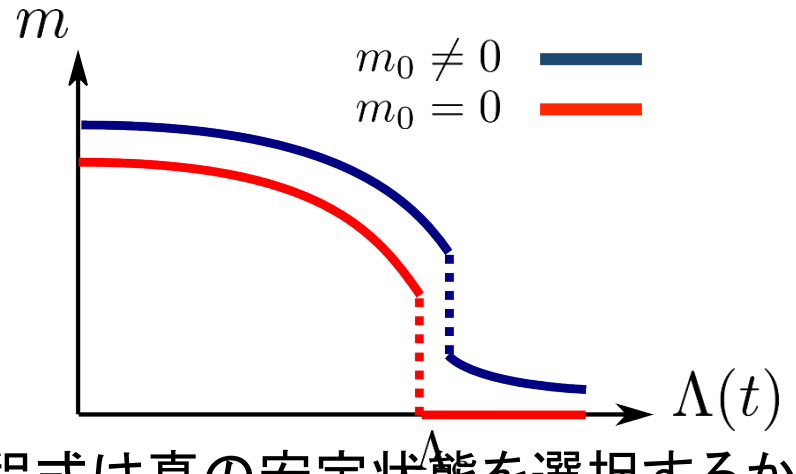


# 有限密度一次相転移の場合

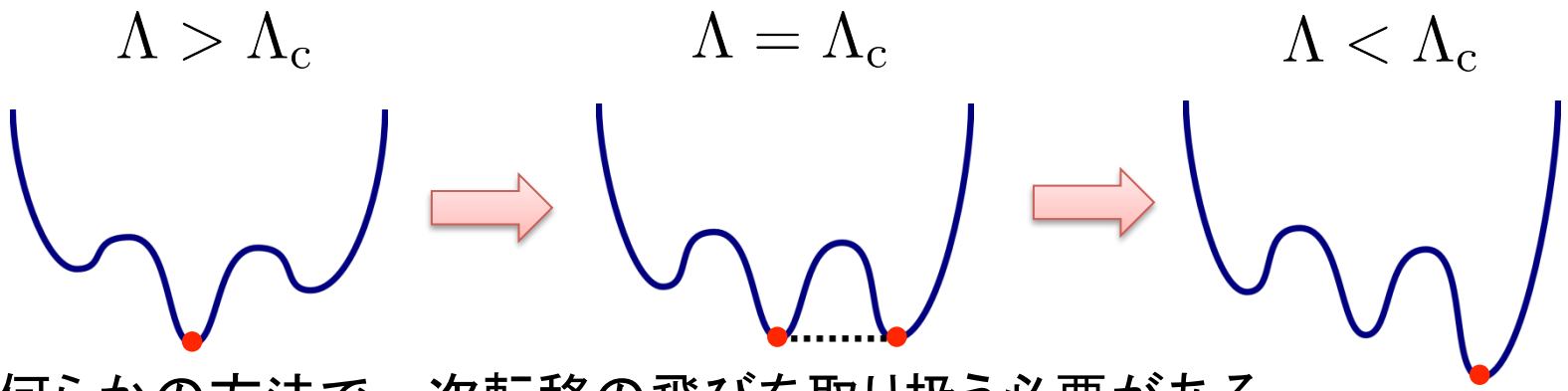
- 質量があっても一次相転移は発生する.

化学ポテンシャル

$\mu \neq 0$




- くりこみ群方程式は真の安定状態を選択するか？
  - 有効ポテンシャルのくりこみ発展




- 何らかの方法で一次転移の飛びを取り扱う必要がある.

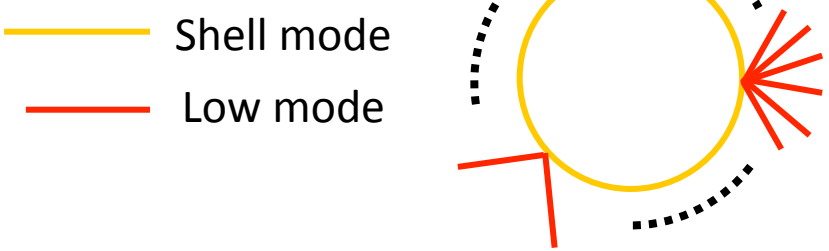
# 偏微分方程式

- フェルミオンポテンシャルのNPRG方程式（large-N leading app.）

$$\partial_t V(\sigma;t) = \frac{\Lambda^4}{4\pi^2}\log\left(1+\frac{1}{\Lambda^2}(\partial_\sigma V)^2\right)$$

Scalar fermion-bilinear field:

$$\sigma \equiv \bar{\psi}\psi$$

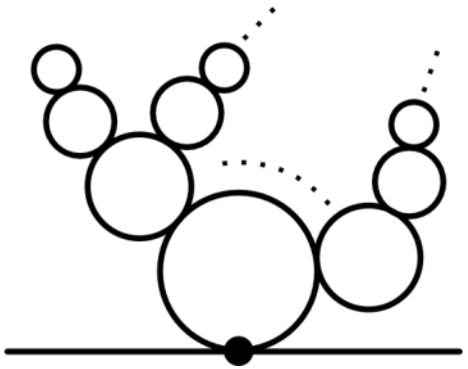



質量関数：

$$M(\sigma;t) \equiv \partial_\sigma V(\sigma;t)$$

微分方程式を積分する.

$$\lim_{t\to\infty} M(t) =$$



無限個のバブルダイアグラムの足し上げと等価

# 質量関数 $M(\sigma;t)=\partial_\sigma V(\sigma;t)$

実際には質量関数に関する偏微分方程式を解く.

$$\partial_t V(\sigma;t)=\frac{\Lambda^4}{4\pi^2}\log\left(1+\frac{1}{\Lambda^2}(\partial_\sigma V)^2\right)\equiv F(\sigma;t)$$

$$\sigma=\bar{\psi}\psi$$

$$\Lambda=\Lambda_0 e^{-t}$$

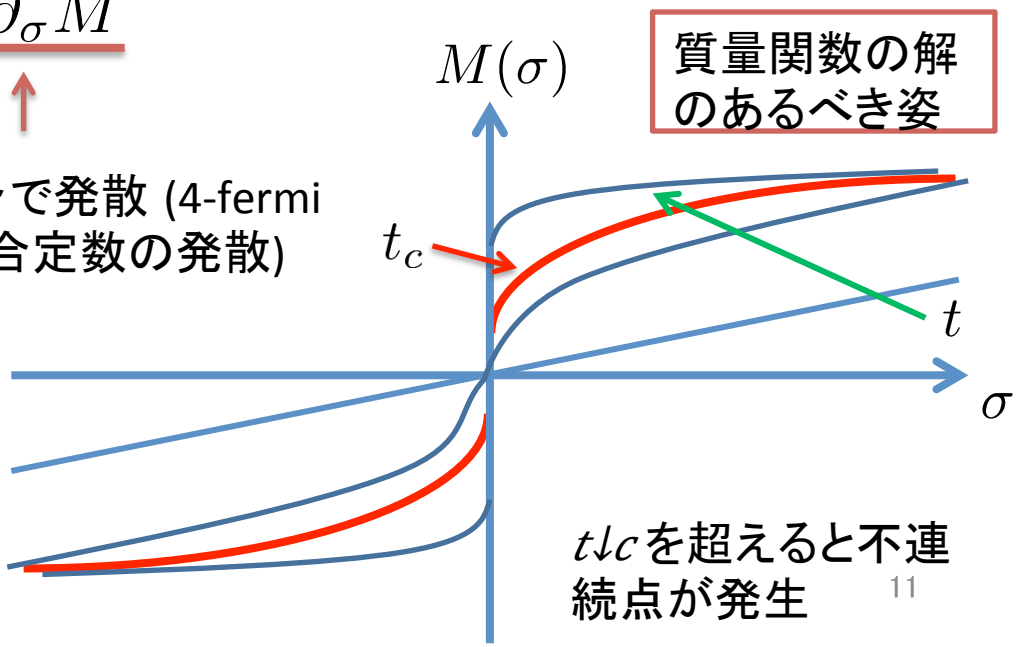
$$M(\sigma;t)=\frac{\partial}{\partial\sigma}V(\sigma;t)$$

$$\partial_t M(\sigma;t)=-\partial_\sigma F(\sigma;t)$$

$$=-\partial_M F(\sigma,M;t)\cdot\partial_\sigma M$$

保存型の方程式
（散逸項のないBurgersタイプの方程式）

$t\downarrow c$で発散 (4-fermi結合定数の発散)




特異性を偏微分方程式としてどう扱うか.

$t\downarrow c$を超えると不連続点が発生

# 弱解の導入

$$\frac{\partial M(\sigma,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(\sigma,t)}{\partial \sigma}=0$$

強方程式

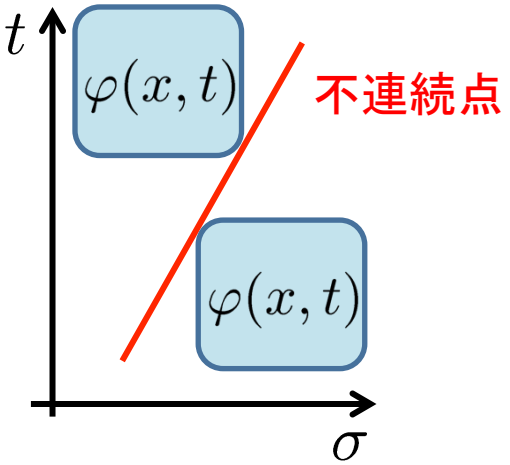
$$\int_0^\infty dt\int_{-\infty}^\infty d\sigma\left(\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)\varphi(\sigma,t)=0$$

$\varphi(\sigma,t)$ 任意の、遠方で消える
なめらかなテスト関数

$$\int_0^\infty dt\int_{-\infty}^\infty d\sigma\left(M\frac{\partial \varphi}{\partial t}+F\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)$$

$$+\int_{-\infty}^\infty d\sigma\ M(\sigma,t=0)\varphi(\sigma,t=0)=0$$

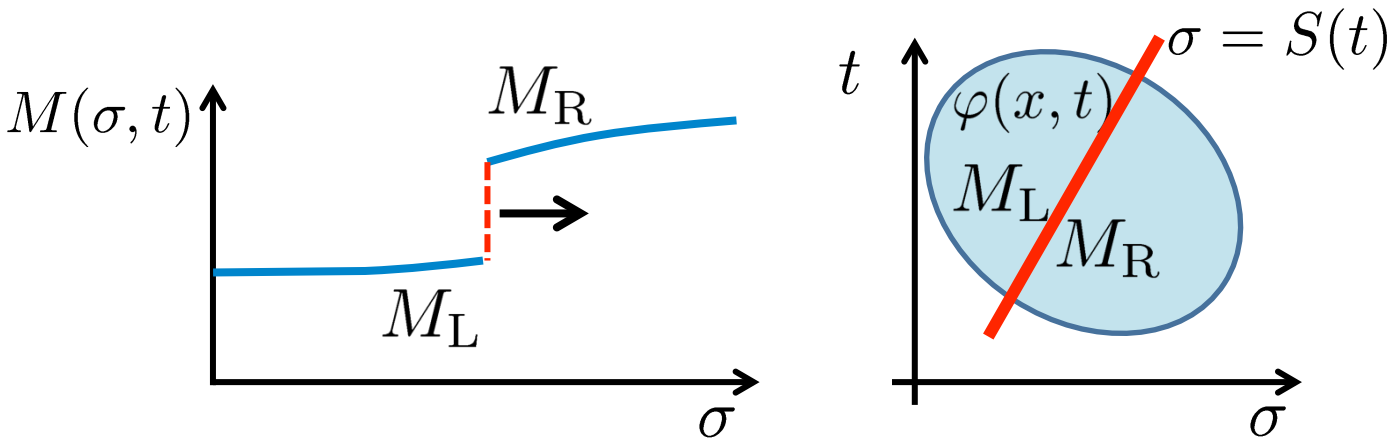
弱方程式




- 弱解とは,
  - 積分型の弱方程式を満たす解.
  - 不連続性があっても、弱解にはなれる.
  - 不連続点以外では強方程式を満たす.

# 不連続点に対する条件

- 弱方程式により不連続点の発展が定まる。



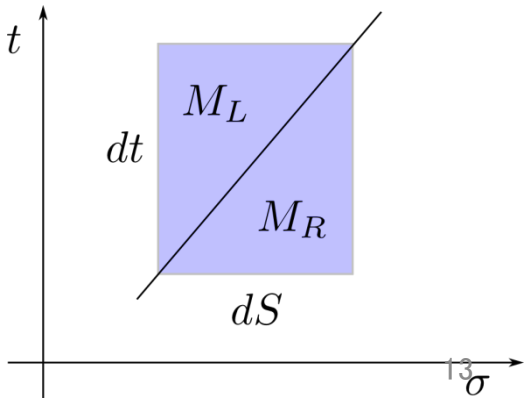

- Rankin-Hugoniot 条件

$$[M_{\mathrm{L}} - M_{\mathrm{R}}]\, dS(t) = [F(M_{\mathrm{L}}) - F(M_{\mathrm{R}})]\, dt$$

電荷の変化 = 電流の流れ込み – 流れ出し

保存型の方程式

$$\frac{\partial M(\sigma,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\sigma,t)}{\partial \sigma} = 0$$



# 特性曲線の方法

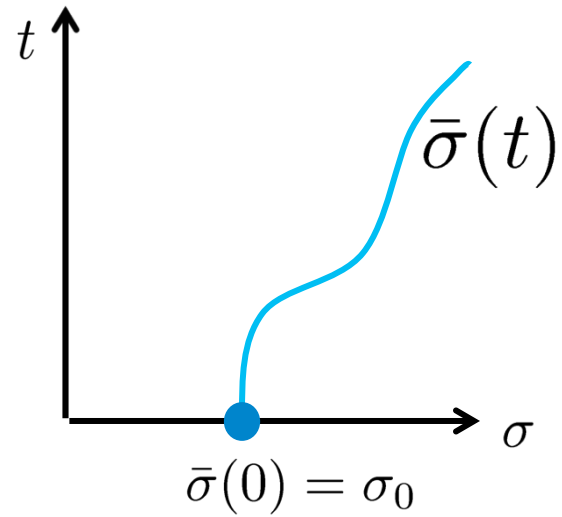
- 空間内にある経路をとり、その経路上での変化を追いかける。

$$\frac{\partial M(\sigma,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(\sigma,M,t)}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial \sigma}+\frac{\partial F(\sigma,M,t)}{\partial \sigma}=0$$

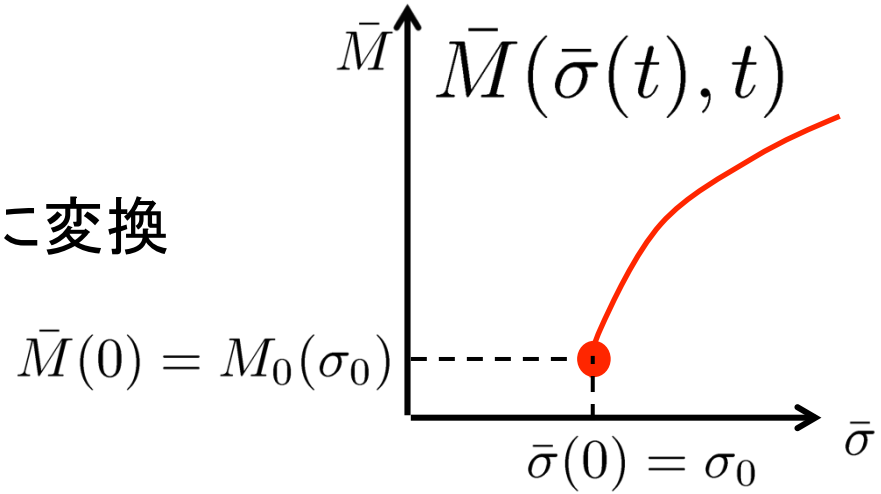
初期条件: $M(\sigma,t=0)=M_0(\sigma)$

$$\frac{d\bar{\sigma}(t)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial M}$$

$$\frac{d\bar{M}(\bar{\sigma}(t),t)}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

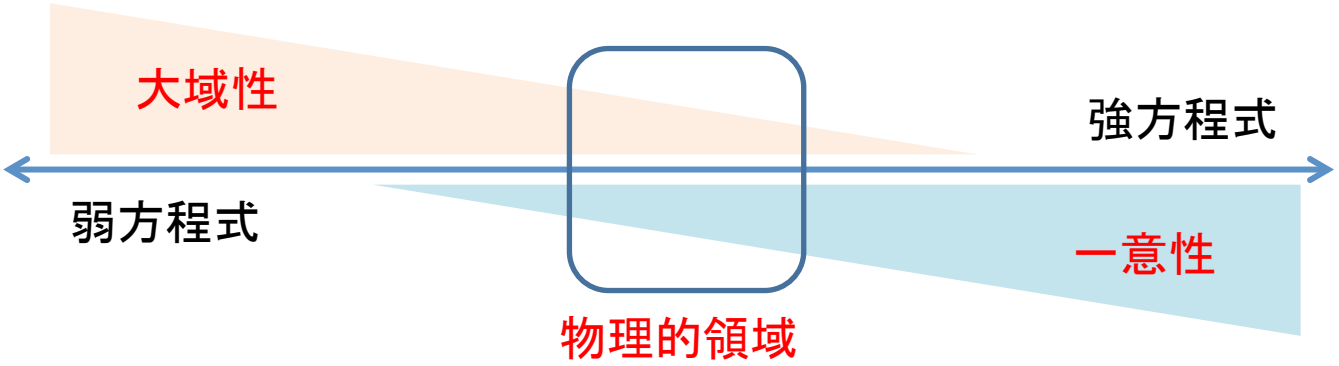



- 偏微分方程式を
  等価な連立常微分方程式に変換



# 弱解の具体的構成法

- 局所強解を用意する。
  - 特性曲線の方法を使う。Lagrange・・・
- 局所強解は、「複葉」構造を持つ。
  - その時点で、古典解は終了する。
- 複葉から単葉を選びながら、局所強解のパッチワークで、弱解を構成する。
  - パッチワークは、RH条件が指定する
- 方程式の強さと解の一意性と大域性



# ゼロ密度NJL

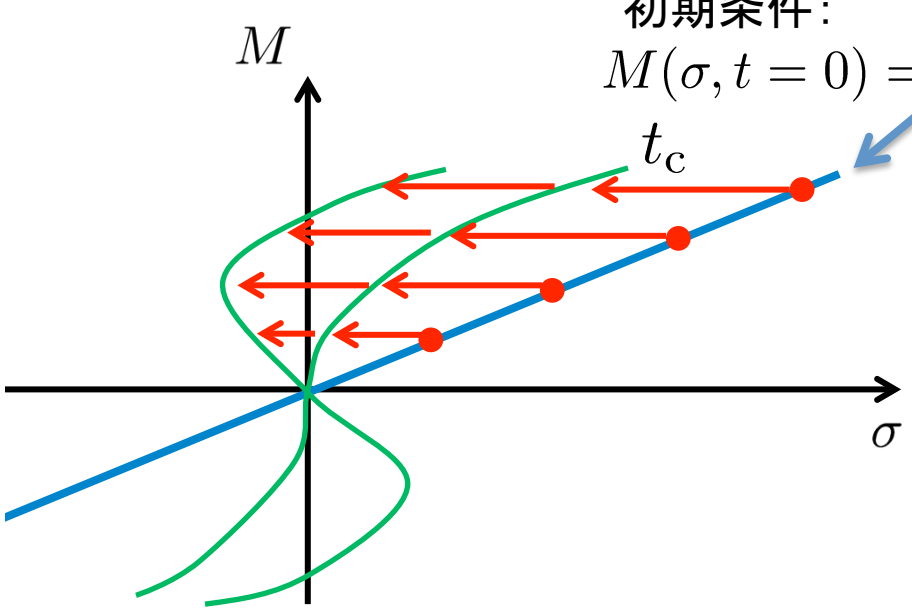
$$F(\bar{\sigma}, M, t) = -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2}\ln\left[1+\frac{1}{\Lambda^2}M^2\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\sigma}(t)}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial M} \propto -\dfrac{M}{\Lambda^2+M^2} \\ \dfrac{d\bar{M}(\bar{\sigma}(t),t)}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$$

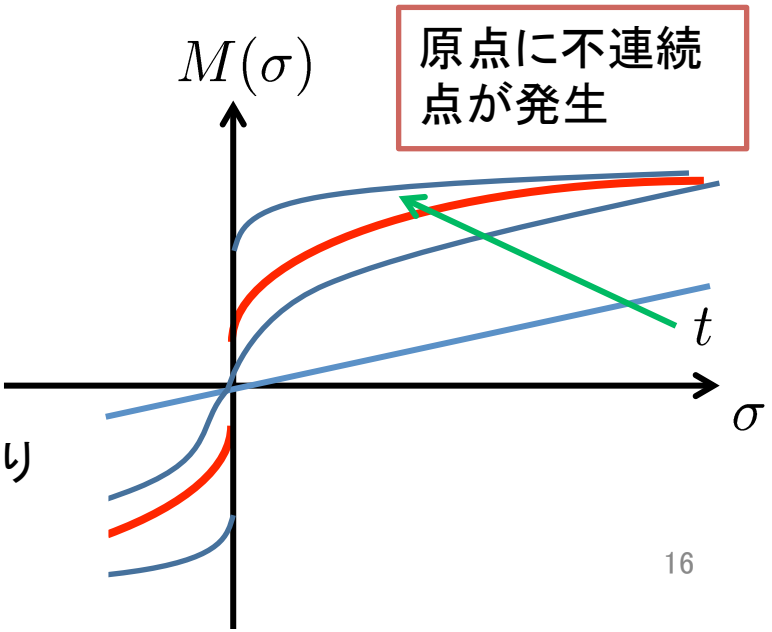
$$V(\sigma; t=0) = \frac{G}{2}\sigma^2$$

初期条件:

$$M(\sigma, t=0) = G\sigma$$




RH条件より




原点に不連続点が発生

# 有限密度NJL

化学ポテンシャル
$\mu \neq 0$

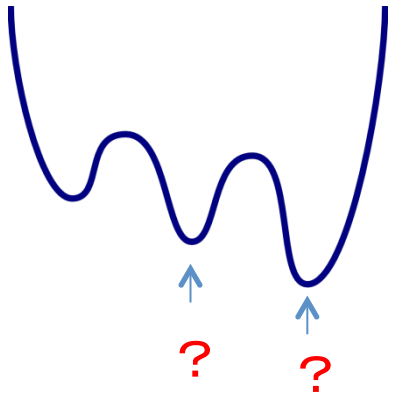
- 有限密度プロパゲータ

$$\frac{1}{\not{p} - M} \to \frac{1}{\not{p} - i\mu\gamma_0 - M}$$

- 特性曲線（温度ゼロ $T$=0，3次元運動量切断$\Lambda$ ）

$$\frac{d\bar{\sigma}(t)}{dt} = -\frac{\Lambda^3 M}{\pi^2\sqrt{\Lambda^2 + M^2}}\theta(\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \mu)$$

  - シェルモードエネルギー$\sqrt{\Lambda^2 + M^2}$ がフェルミエネルギー $\mu$ を超えると特性曲線のくりこみ発展がストップする.




- 自己無撞着方程式との対応
  - 真の安定解と準安定解が出現

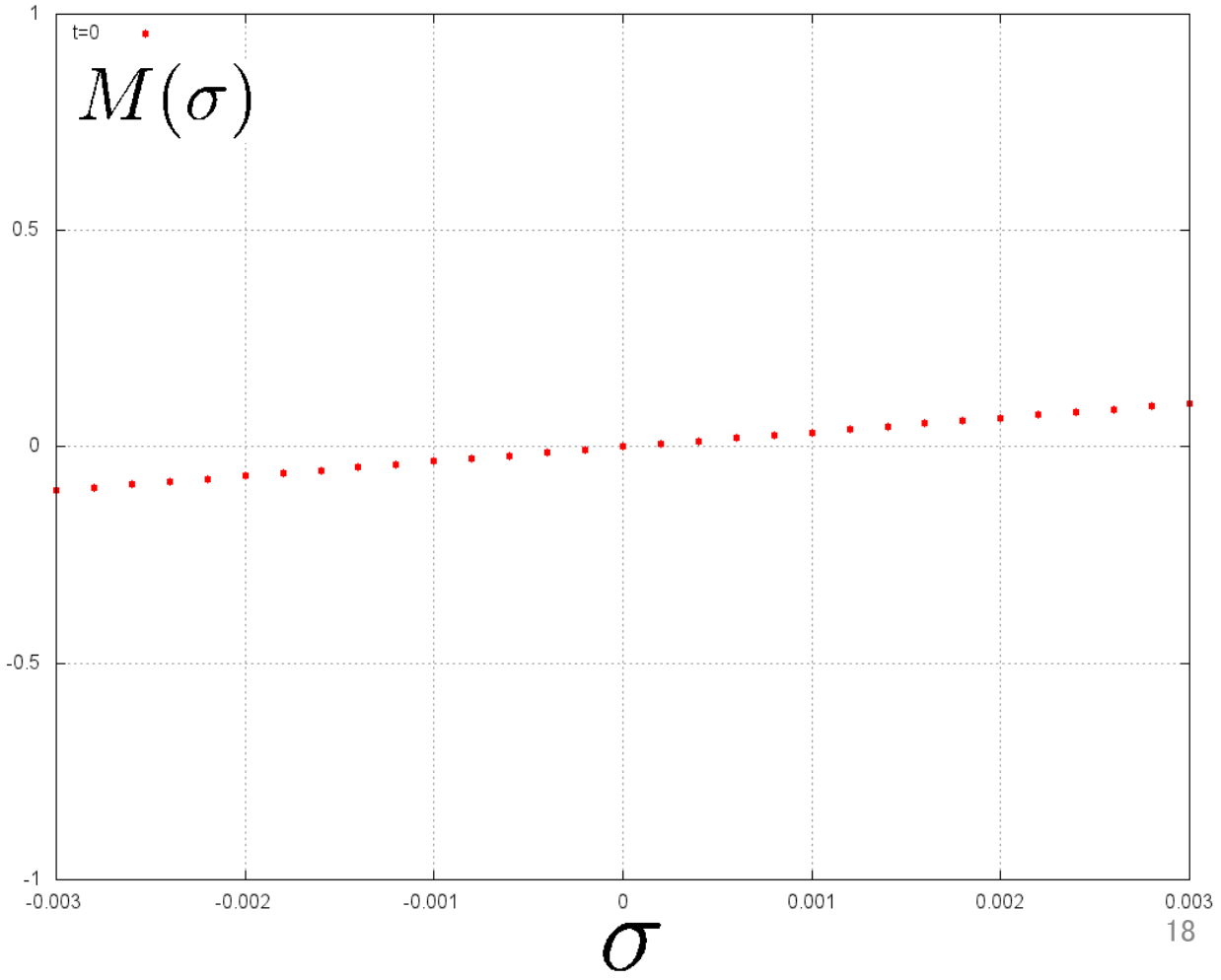
- 弱解は真の安定解（状態）を選ぶのか？
  - 弱解は一意に決まるのか？

# 有限密度NJL

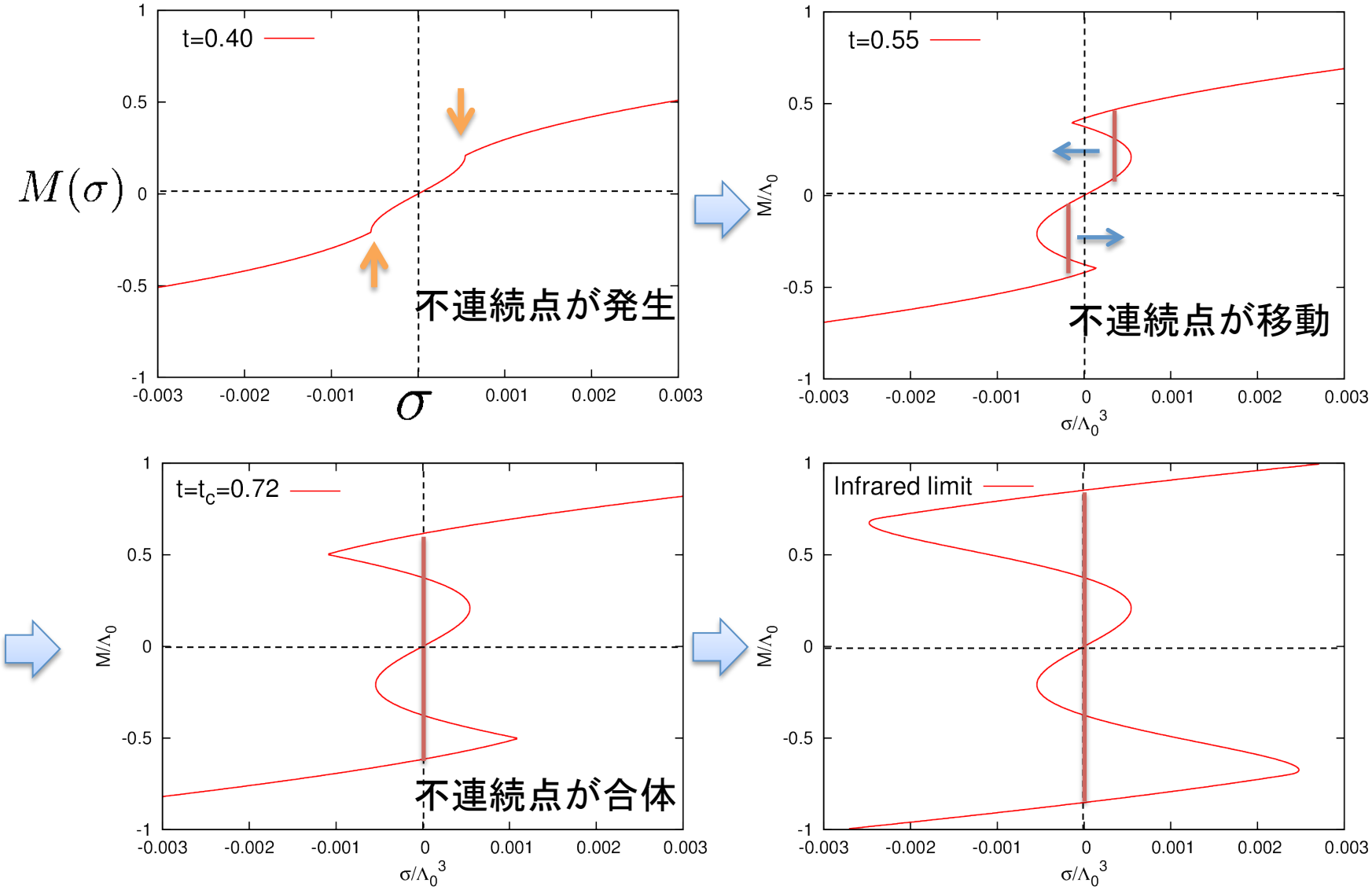
$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\sigma}(t)}{dt} = -\dfrac{\Lambda^3 M}{\pi^2\sqrt{\Lambda^2+M^2}}\theta(\sqrt{\Lambda^2+M^2}-\mu) \\ \dfrac{d\bar{M}(t)}{dt} = 0 \end{cases} \qquad \Lambda = \Lambda_0 e^{-t}$$

初期条件

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(t=0) = \sigma_0 \\ \bar{M}(t=0) = G\sigma_0 \end{cases}$$

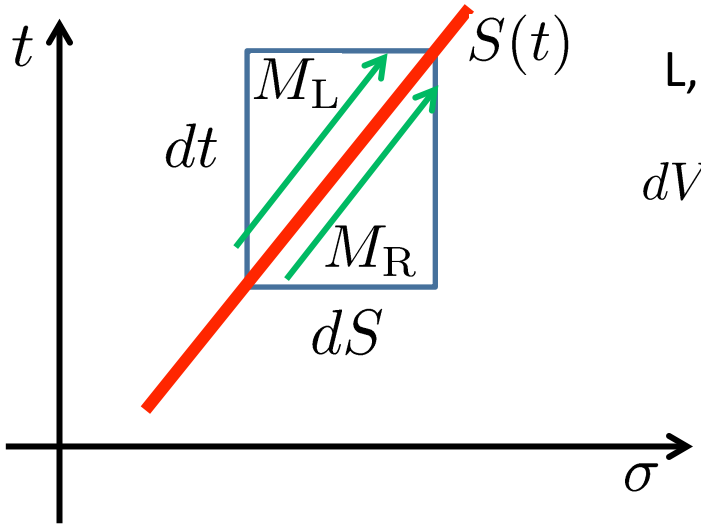


# 有限密度NJL模型




化学ポテンシャル $\mu$ を大きくすると一次相転移が起きる.

# RH条件による $V(\sigma)$ の連続性保証




L, R それぞれの領域で強解になっている。

$$dV_{\mathrm{L,R}} = \left.\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right|_{\mathrm{L,R}} dS + \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{\mathrm{L,R}} dt = M|_{L,R} ds - F|_{\mathrm{L,R}} dt$$

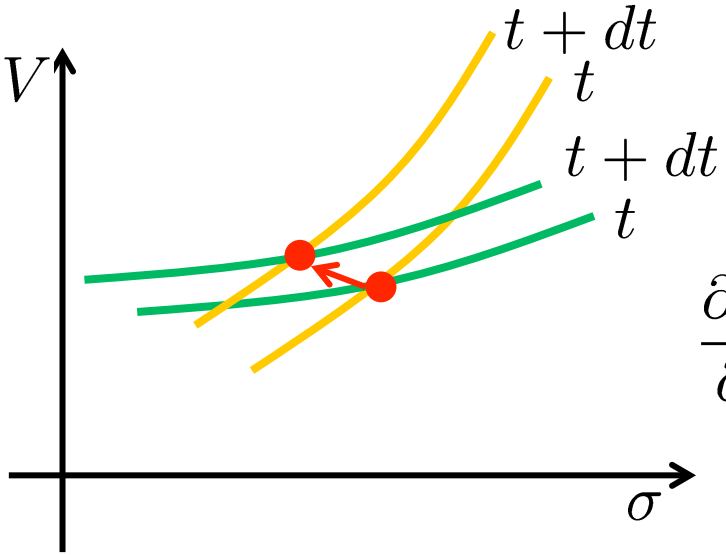
RH条件

$$d(V_{\mathrm{L}} - V_{\mathrm{R}}) = 0$$

特異点は最初はなかった。

$$V_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{R}}$$

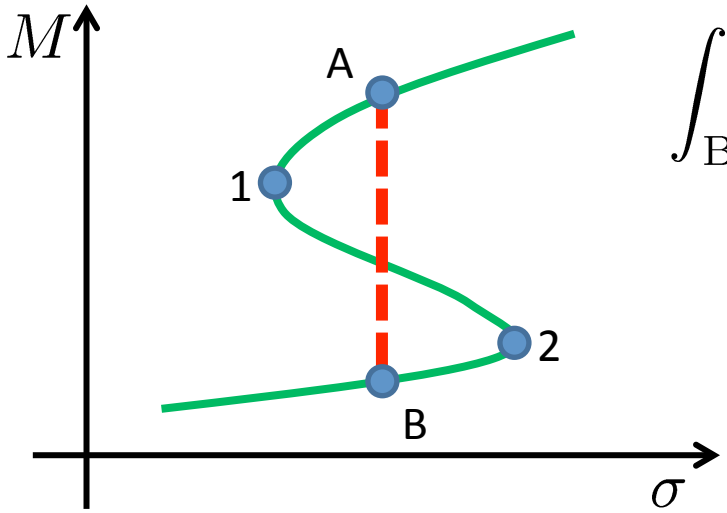
全空間でVは連続




$$\frac{\partial V}{\partial t} = F(M)$$

Mが違うとVの発展も異なる。
それを、特異点の位置の変化で吸収して、Vの連続性を保つ

# RH条件の幾何学的意味




$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} M d\sigma = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma$$
$$= V_{\mathrm{A}} - V_1 - (V_2 - V_1) + V_2 - V_B$$
$$= V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}$$

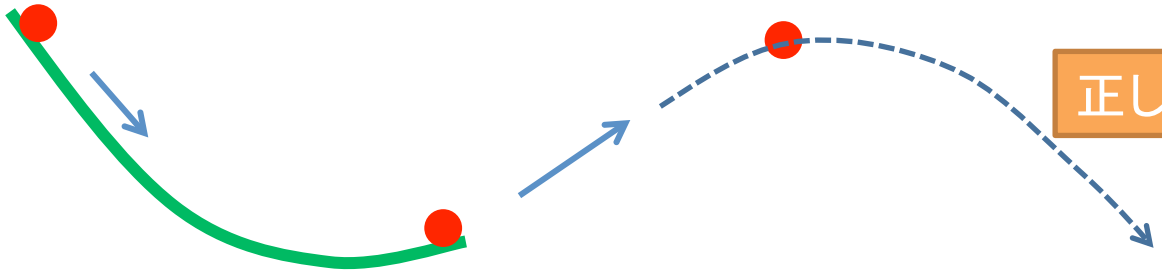
⇓ Vの連続性

$$\int_1^2 M d\sigma = 0$$

**等面積則**

cf. Maxwell の等面積則（液相・気相共存線）

RH条件：自由落下の運動方程式



**正しい軌跡は、初期条件で決まる。**

# ルジャンドル有効ポテンシャル $V_L(\phi;t)$

- カイラル凝縮$\langle\psi\,\psi\rangle$を与える外場(裸の質量)の導入$j\cdot\bar{\psi}\psi$

$$W(j;t)=V(\sigma=0;t,j)$$

$$\phi(j;t)\equiv\langle\bar{\psi}\psi\rangle_j=\frac{\partial W(j;t)}{\partial j}$$

– $\sigma$方向の並進対称性から

$$\phi(j;t)=\frac{1}{G}M(j/G,t)-\frac{j}{G}$$

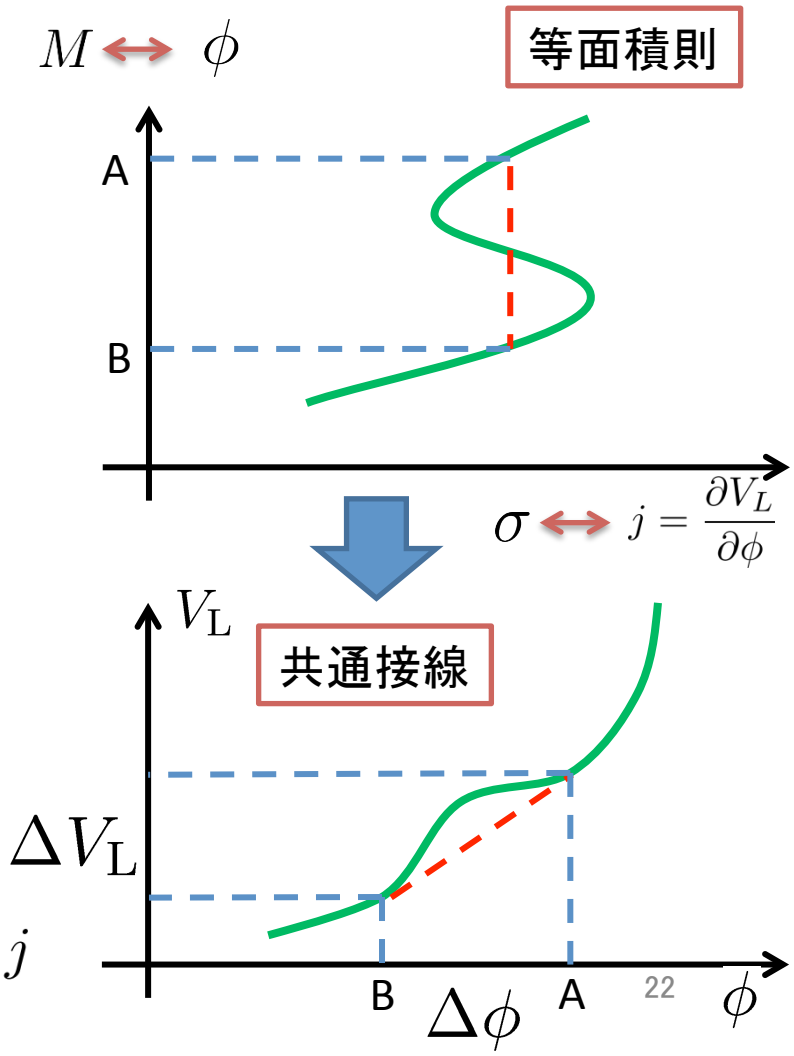
$$W(j,t)=V(j/G;t,j=0)-\frac{j^2}{2G}$$

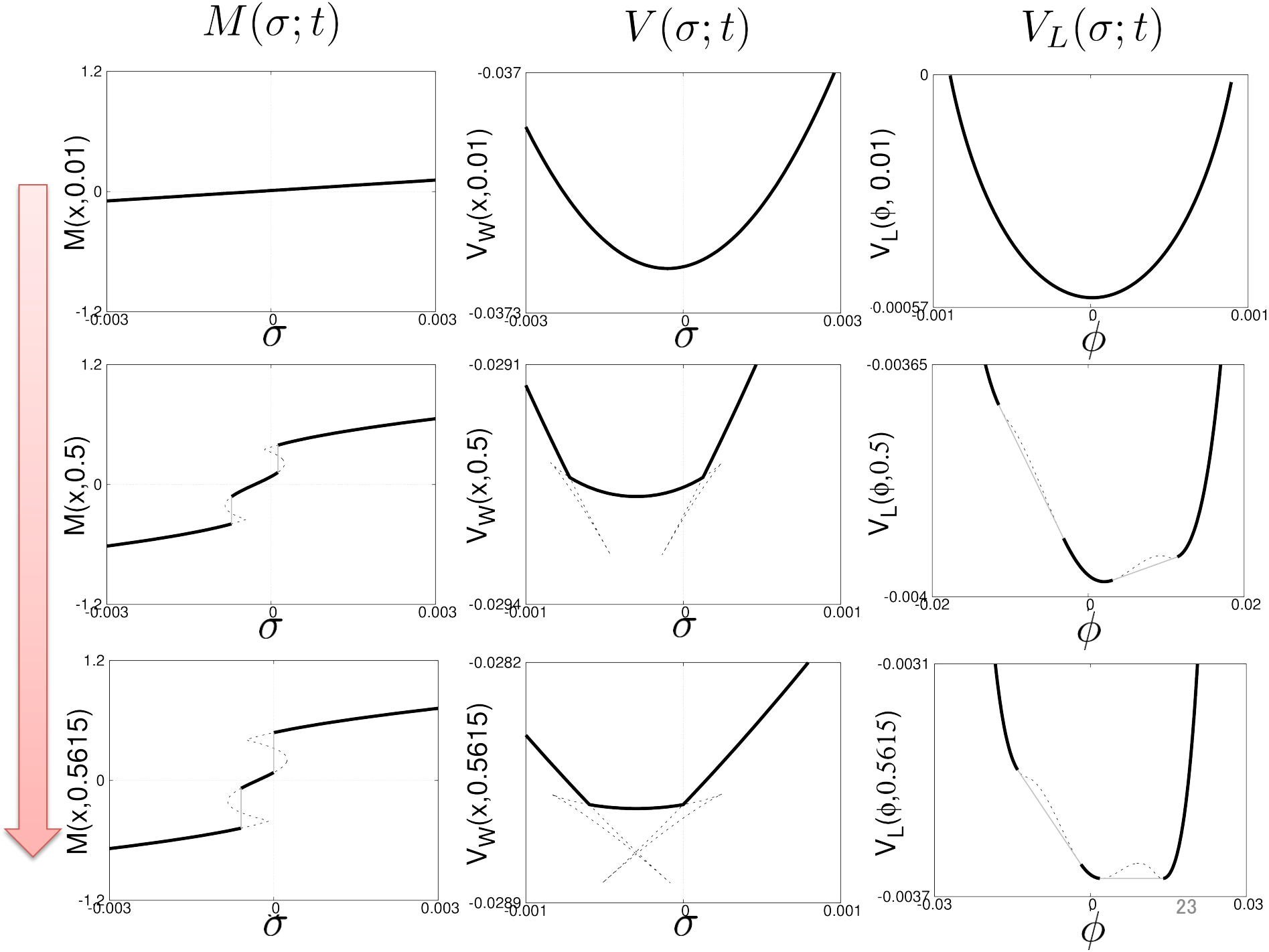
- ルジャンドル変換:

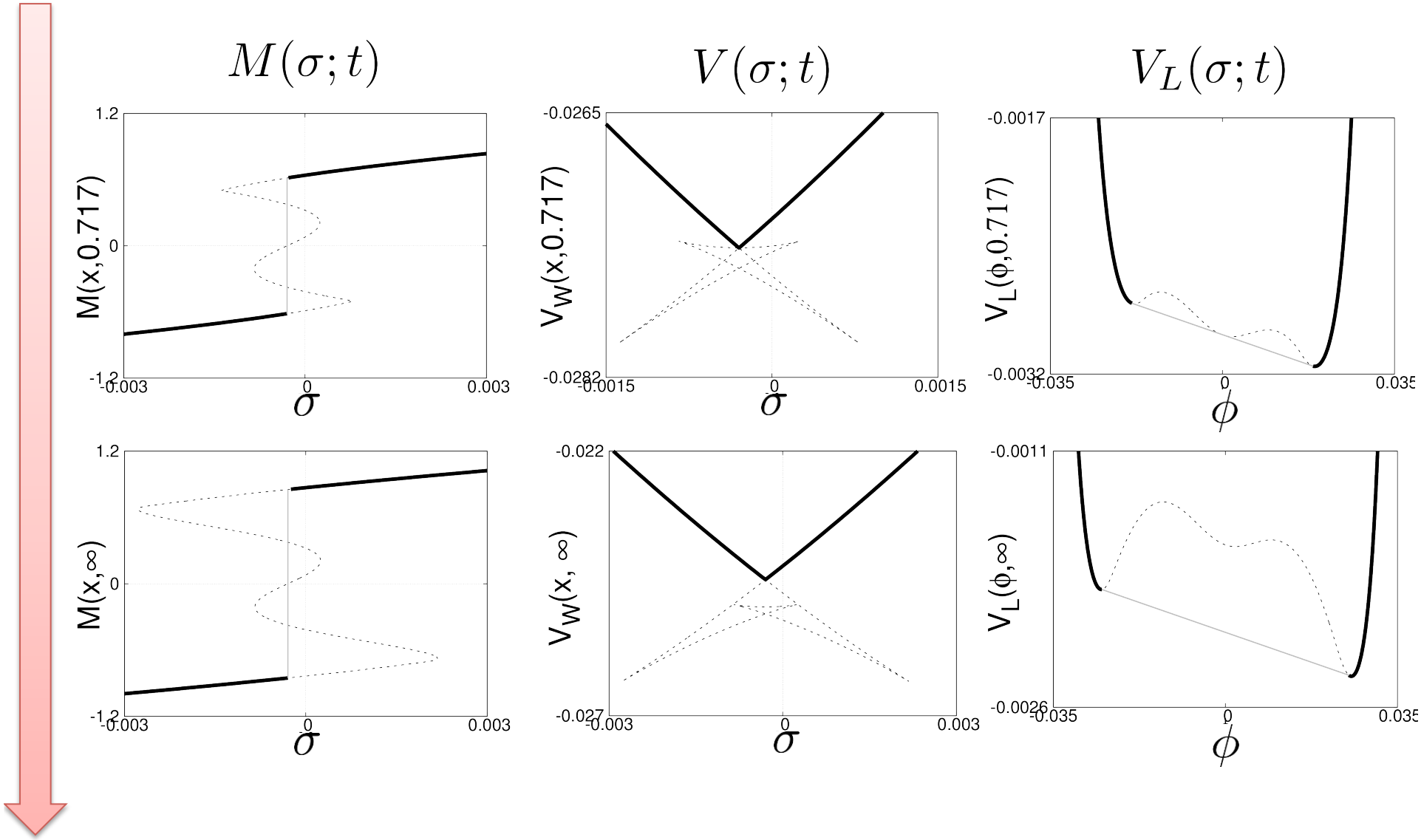
$$V_L(\phi;t)=j\phi(j;t)-W(j;t)$$

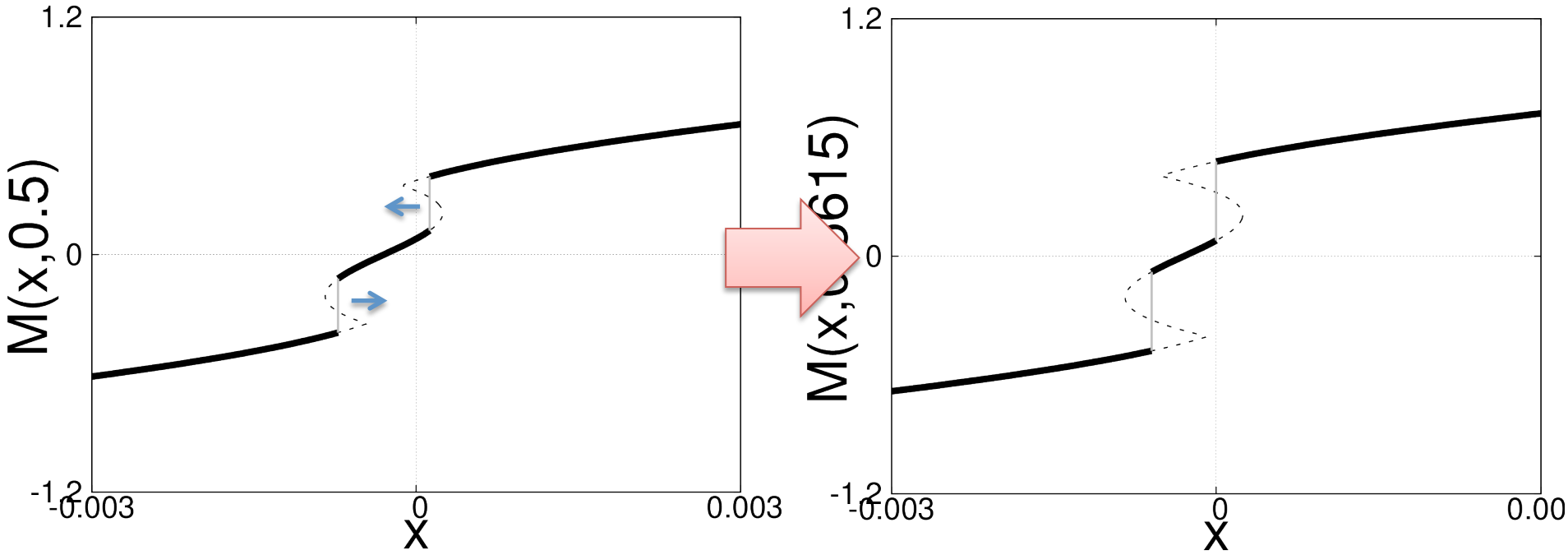
$$\frac{\partial V_L}{\partial\phi}=j$$

- RH条件⇒等面積則
⇒共通接線⇒凸化




$M(\sigma;t)$
$V(\sigma;t)$
$V_L(\sigma;t)$
M(x,0.01)
$V_W$(x,0.01)
$V_L(\phi, 0.01)$
M(x,0.5)
$V_W$(x,0.5)
$V_L(\phi,0.5)$
M(x,0.5615)
$V_W$(x,0.5615)
$V_L(\phi,0.5615)$
$\sigma$
$\phi$

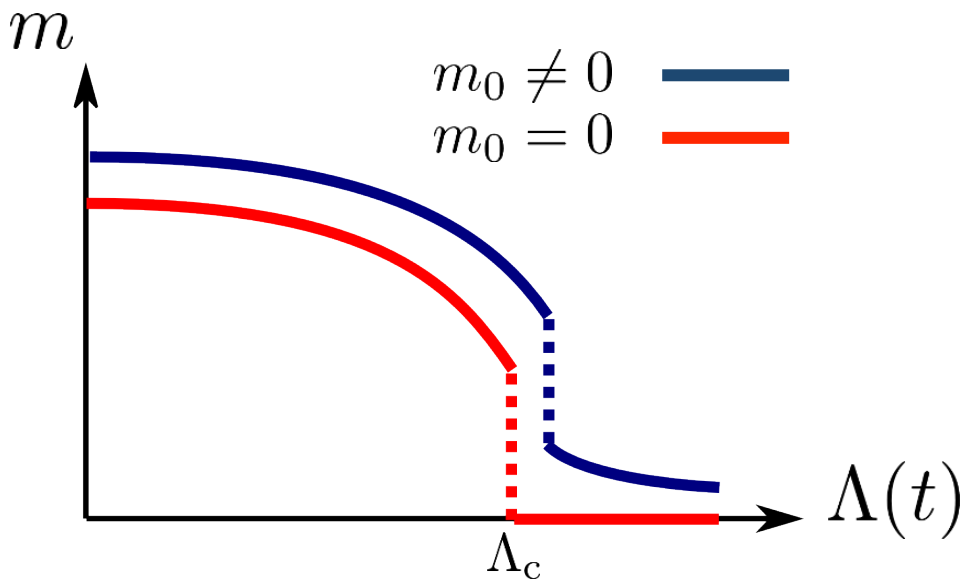

$M(\sigma;t)$
$V(\sigma;t)$
$V_L(\sigma;t)$
M(x,0.717)
$V_W$(x,0.717)
$V_L(\phi,0.717)$
M(x,∞)
$V_W$(x, ∞)
$V_L(\phi,\infty)$
$\sigma$
$\phi$
1.2
0
-1.2
-0.003
0.003
-0.0265
-0.0282
-0.0015
0.0015
-0.0017
-0.0032
-0.035
0.035
-0.022
-0.027
-0.0011
-0.0026


1.2
0
-1.2
M(x,0.5)
-0.003
0
0.003
X
1.2
0
-1.2
M(x,
615)
-0.003
0
0.00
X

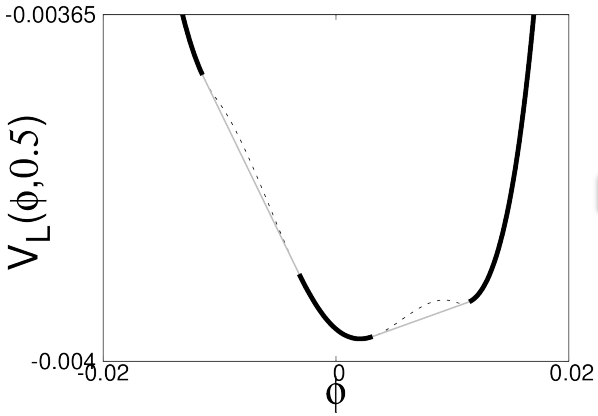
# 弱解は一次相転移を説明する！

化学ポテンシャル

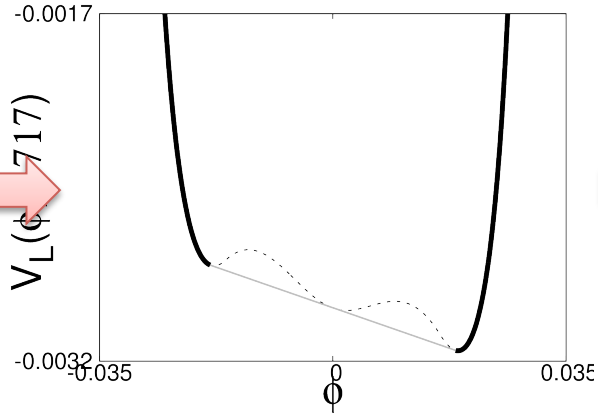
$\mu \neq 0$



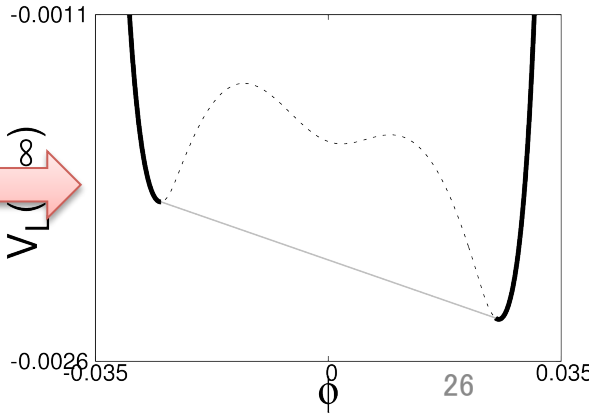

$\Lambda > \Lambda_c$




$\Lambda = \Lambda_c$




$\Lambda < \Lambda_c$



# まとめ

- 弱解を導入することで質量関数の特異性を乗り越えることができた.
- 弱解は真の安定状態(解)を一意に選択する.
  - フェルミオンポテンシャルの連続性
  - ルジャンドル有効ポテンシャルの凸化
- 弱解の応用
  - QCDでnon-ladderダイアグラムを加えて，ゲージ依存性をほぼなくした計算に成功．Aoki & D.S. (2013).
  - 有限密度QCDにおけるnon-ladderの効果.
  - Large-N non-leadingな相互作用の効果．質量関数の二階微分$\partial\downarrow\sigma\uparrow 2\ M$(負の散逸項)が現れる.