

巡回的合成写像と 力才ス的消费行动

堂谷昌孝 新里泰孝
富山大学経済学部

2009

1. 摂動法

1.1. 摂動法とは

高次元の離散時間系を分析するための摂動法.

- (i) パラメータを特定化し, 解析しやすいシステム (多くの場合 1 次元系) に還元して, そこで(摂動に関して)頑健な動学の分析を行う.
- (ii) 頑健性を使って, そのパラメータの近傍でも同じ動学が発生することを言う.

この摂動法は有効に利用されてきた. 例えば Dohtani et al. (1996).

1.2. カルドアモデルによる例示

以下のカルドアモデルを考える.

$$\Theta \begin{cases} Y_{n+1} - Y_n = \alpha[\{I(Y_n) - iK_n\} - S(Y_n)], \\ K_{n+1} - K_n = \{I(Y_n) - iK_n\} - \delta K_n, \end{cases}$$

パラメータ値は全て正值である. このような2次元写像の大域的動学を直接的に分析することは困難. $i=0$ として, 以下の**補助系**を考える.

$$\tilde{\Theta} \begin{cases} Y_{n+1} - Y_n = \alpha[I(Y_n) - S(Y_n)], \\ K_{n+1} - K_n = I(Y_n) - \delta K_n, \end{cases}$$

この補助系は**独立した1次元系**を持っている.

この補助系はカルドアモデルではないことに注意. しかし, **補助系が摂動に関してロバストなカオスを持つ**とすれば, i が小さければカオスを発生する. すなわちもともとのカルドアモデルがカオスを発生する. この例では, 独立した1次元系を直接に取り出すことにより摂動法を使用可能になった. これまで経済学で使われてきたのは, この**直接的な還元法**である. この方法では, 1次元カオスの世界を超えて非線形問題の視野を広げられない. 以下では, これとは異なる還元法を試みる.

2. 非線形現象を発生する高次元特有の要因

以下のシステムで説明

$$\Omega \begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_n^2 - cx_n y_n + dy_n, \\ y_{n+1} = e - hx_n^2 + ky_n^3, \end{cases}$$

パラメータは全て正值.

2.1. これまでの還元法

$c = d = 0$ とする. このとき Ω は

$$\Omega_1 \begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_n^2, \\ y_{n+1} = e - hx_n^2 + ky_n^3, \end{cases}$$

となる. Ω_1 は**独立な1次元系**を持っている. 摂動法により, この1次元系で**ロバストなカオス**が探索できれば, c, d が小さいときにカオスの発生が言える. これより, 第1式の $ax_n - bx_n^2$ の非線形性がカオス発生の1つの要因であることが分かる.

2.2. 新しい還元法

$a = b = c = k = 0$ とする. このとき Ω は

$$\Omega_2 \begin{cases} x_{n+1} = dy_n = f(y_n), \\ y_{n+1} = e - hx_n^2 = g(x_n), \end{cases}$$

摂動法により, Ω_2 にロバストなカオスがあれば a, b, c, h が小さければカオスを発生する. Ω_2 の動学分析は単純. $F(x, y) = (f(y), g(x))$ とすれば, $F^2 : (x, y) \mapsto (f \circ g(x), g \circ f(y))$ となり, 2つの独立した1次元系を得る. これより, $G = F^2$ の動学は $\theta(u) = f \circ g(u)$ の動学に還元できる. この還元法の特徴は, **異なる変数間の相互依存関係とその合成**に注目しているということである.

2.3. F^2 と θ 動学の対応関係

$(r, g(r))$ の G による m 回の反復を考える.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r \\ g(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} \theta(r) \\ g \circ f \circ g(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \theta(r) \\ g \circ \theta(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \\ &\begin{pmatrix} \theta^2(r) \\ g \circ \theta^2(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} \theta^m(r) \\ g \circ \theta^m(r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより, r が θ の m 周期点ならば, $(r, g(r))$ は G の m 周期点であることが分かる.

2.4. 3次元写像のケース

簡単化のために、以下の分離系のケースを考える。

$$\Omega_3 \begin{cases} x_{1,n+1} = g_{11}(x_{1,n}) + g_{12}(x_{2,n}) + g_{13}(x_{3,n}), \\ x_{2,n+1} = g_{21}(x_{1,n}) + g_{22}(x_{2,n}) + g_{23}(x_{3,n}), \\ x_{3,n+1} = g_{31}(x_{1,n}) + g_{32}(x_{2,n}) + g_{33}(x_{3,n}). \end{cases}$$

以下で注目する、異なる変数間の相互依存関係の合成写像は

$$g_{ij} \circ g_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j),$$
$$g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j, j \neq k, k \neq i).$$

これらを**巡回的合成写像**と呼ぶ。

2.5. 合成写像の非線形性の特徴

$x = f(y) = dy$, $y = g(x) = e - hx^2$ の合成の非線形性がカオス発生の要因になる. その際, f と g の非線形性が弱くても, その合成の非線形性はかなり強い場合がある. 以下を考える.

$$x = f(y) = 20y, \quad y = g(x) = 1 - 0.1x^2.$$

この例では, g の非線形は弱く, f は直線. しかしながら, その合成は $y = f \circ g(x) = 1 - 2x^2$ となり, その非線形性は強いものになる. このように高次元では, 変数間の弱いけれど**異なった**非線形性が合成される結果, 強い非線形効果を持つに至る. これが, 高次元でカオスが起り易いもう 1 つ理由. しかし, そもそもどのような合成が効いてくるかが問題である.

異なる非線型という点が重要. 同じ写像の合成 (反復) で, 非線形性の弱いケースでは以下のようなになる.

- ❶ 非線形系の弱い安定な写像の反復 → 安定
- ❷ 非線形性の弱い不安定な写像の反復 → 完全不安定

3. 消費行動と履歴性

3. 1. 経験が選択行動に影響を与えるという考え:

Pareto

3. 2. 経験の消費水準への影響をモデルに組み込む:

Duesenberry (1949), Modigliani (1949), and Brown (1952).

3. 3. 経験の効用関数への影響をモデルに組み込む:

Georgescu-Roegen (1950), Day (1970), Pollak (1970),
Day and Kennedy (1971), Gorman (1976), Weizacker
(1971), McCarthy (1974), and Hammond (1976).

3.4. 経験が効用関数に影響するモデルを使って（高所得者の）気まぐれな消費行動（erratic consumption behavior）を説明する：

Benhabib and Day (1981), Gaertner and Jungeilges (1988, 1993).

4. モデルの導出

消費者は3人, 財は2種.

個人 k の x 財の消費量: x_k , 個人 k の y 財の消費量: y_k ,

個人 k の予算制約: $I_k \geq p_x x_k + p_y y_k$,

効用関数: $u_1(x_1, y_1) = x_1^r y_1^{1-r}$, $u_2(x_2, y_2) = x_2^s y_2^{1-s}$,

$u_3(x_3, y_3) = x_3^t y_3^{1-t}$,

静学的効用最大化より

$$x_{1,n} = rI_1 / p_x, \quad y_{1,n} = (1-r)I_1 / p_y, \quad x_{2,n} = sI_2 / p_x,$$

$$y_{2,n} = (1-s)I_2 / p_y, \quad x_{3,n} = tI_3 / p_x, \quad y_{3,n} = (1-t)I_3 / p_y.$$

Benhabib and Day (1981), Gaertner and Jungeilges (1988, 1993) に従って、個人 k の効用関数の弾力性が自分自身や他人の過去の消費に依存する場合を考える。例えば以下を考える。

$$\begin{aligned}r_{n+1} &= \theta_r(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}), \\s_{n+1} &= \theta_s(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}), \\t_{n+1} &= \theta_t(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, y_{1,n}, y_{2,n}, y_{3,n}).\end{aligned}$$

依存性が非線形の場合、気まぐれな消費行動を発生しうる。Gaertner and Jungeilges (1988, 1993)の以下の例を取り上げる。

$$\begin{aligned}r_{n+1} &= \alpha_{11}x_{1,n}y_{1,n} + \alpha_{12}x_{2,n}y_{2,n} + \alpha_{13}x_{3,n}y_{3,n}, \\s_{n+1} &= \alpha_{21}x_{1,n}y_{1,n} + \alpha_{22}x_{2,n}y_{2,n} + \alpha_{23}x_{3,n}y_{3,n}, \\t_{n+1} &= \alpha_{31}x_{1,n}y_{1,n} + \alpha_{32}x_{2,n}y_{2,n} + \alpha_{33}x_{3,n}y_{3,n},\end{aligned}$$

若干の計算により以下が得られる.

$$A^{IC}_\varepsilon \begin{cases} v_{1,n+1} = \pi_{11}v_{1,n}(1-v_{1,n}) + \pi_{12}v_{2,n}(1-v_{2,n}) + \pi_{13}v_{3,n}(1-v_{3,n}) \\ v_{2,n+1} = \pi_{21}v_{1,n}(1-v_{1,n}) + \pi_{22}v_{2,n}(1-v_{2,n}) + \pi_{23}v_{3,n}(1-v_{3,n}) \\ v_{3,n+1} = \pi_{31}v_{1,n}(1-v_{3,n}) + \pi_{32}v_{2,n}(1-v_{2,n}) + \pi_{33}v_{3,n}(1-v_{3,n}) \end{cases}$$

ここで

$$(v_{1,n}, v_{2,n}, v_{3,n}) \equiv \left(\frac{P_x x_{1,n}}{I_1}, \frac{P_x x_{2,n}}{I_2}, \frac{P_x x_{3,n}}{I_3} \right),$$

$$\pi_{jk} \equiv \frac{\alpha_{jk} I_k^2}{P_x P_y} \quad (j, k \in \{1, 2, 3\}),$$

$$(\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{32}, \pi_{33}) = \varepsilon \in [0, \infty)^9 \equiv \Omega$$

以下を定義する.

$$g_{ij}(v_j) \equiv \pi_{ij} v_j (1 - v_j) \quad (j = 1, 2, 3).$$

1次元の議論から g_{jj} ($j = 1, 2, 3$) の非線形性がカオスの一つの要因であることは明らか. 実際, Benhabib and Day (1981) はそれを示した. 我々は, より一般的に, 巡回的結合写像の非線形性がカオスの要因になりうることを示した.

Figure 1 :

$$\Lambda^{IC} \begin{cases} v_{1,n+1} = 0.02v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 3.6v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.01v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{2,n+1} = 0.03v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.03v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 3.1v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{3,n+1} = 3.9v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.04v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.02v_{3,n}(1-v_{3,n}), \end{cases}$$

$v_1 + v_2 + v_3$ の時系列と散布図

Figure 2 :

$$\Lambda^{IC} \begin{cases} v_{1,n+1} = 0.02v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 3.6v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.01v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{2,n+1} = 0.03v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.03v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 3.1v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{3,n+1} = \pi_{31}v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.04v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.02v_{3,n}(1-v_{3,n}), \end{cases}$$

$\pi_{31} \in [3.35, 3.91], \quad v_{1,n} \in [0.5, 0.95]$ の分岐図

Figure 3 :

$$\Lambda^{IC} \begin{cases} v_{1,n+1} = 0.02v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.03v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 3.5v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{2,n+1} = 3.835v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.01v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.02v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{3,n+1} = 0.03v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 3.7v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.03v_{3,n}(1-v_{3,n}), \end{cases}$$

$v_1 + v_2 + v_3$ の時系列と散布図

Figure 4 :

$$\Lambda^{IC} \begin{cases} v_{1,n+1} = 0.02v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.03v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 3.5v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{2,n+1} = 3.835v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 0.01v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.02v_{3,n}(1-v_{3,n}), \\ v_{3,n+1} = 0.03v_{1,n}(1-v_{1,n}) + 3.7v_{2,n}(1-v_{2,n}) + 0.03v_{3,n}(1-v_{3,n}), \end{cases}$$

$\pi_{21} \in [3.815, 3.84], \quad v_{1,n} \in [0.4, 0.6]$ の分岐図

Figure 5 :

分岐ダイアグラムで釣鐘状に黒く塗りつぶされた部分の軌道
は準周期軌道

Figure 6 :

トレンドを持つ時系列

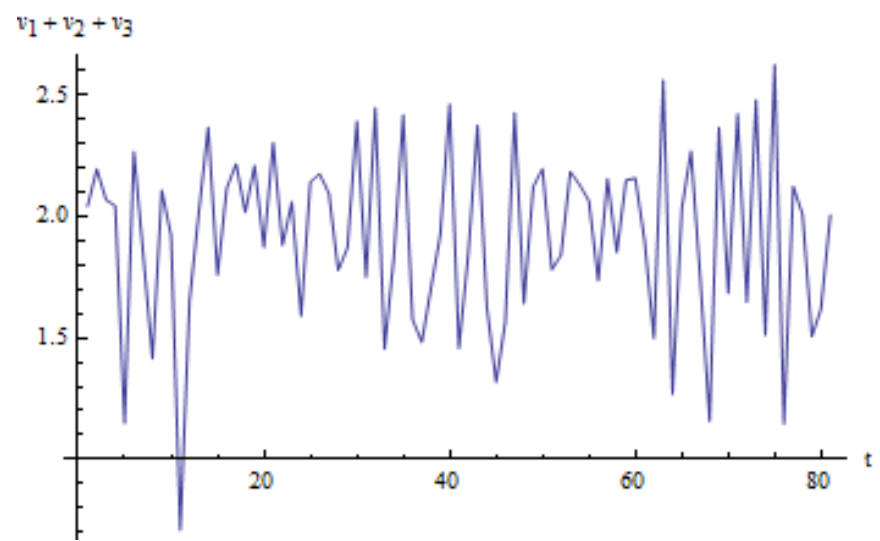
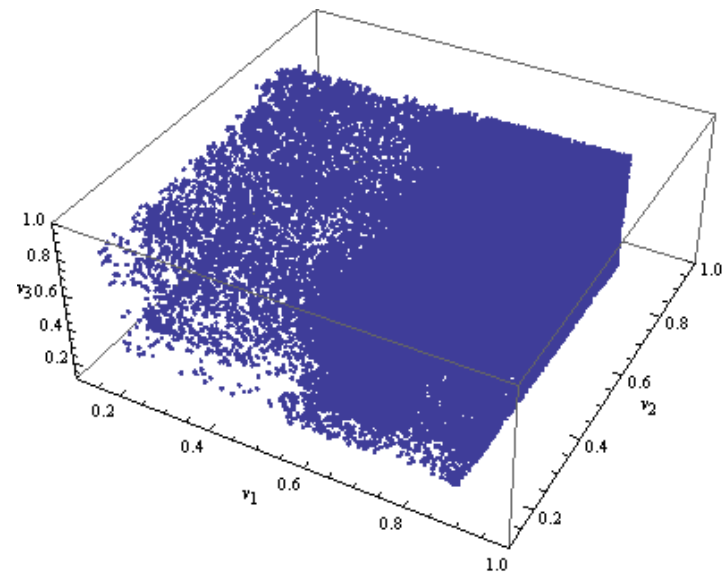


Figure 1

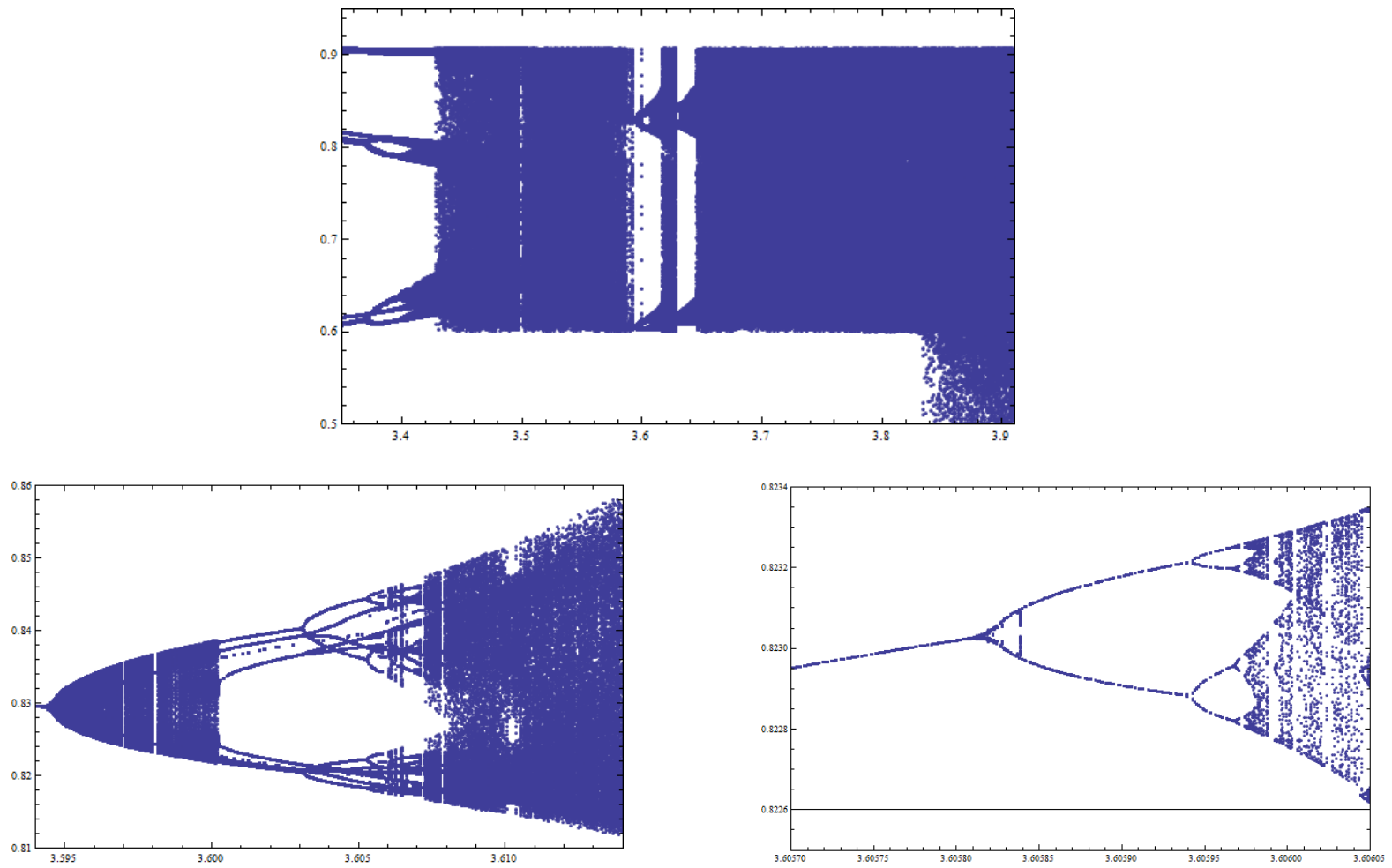


Figure 2

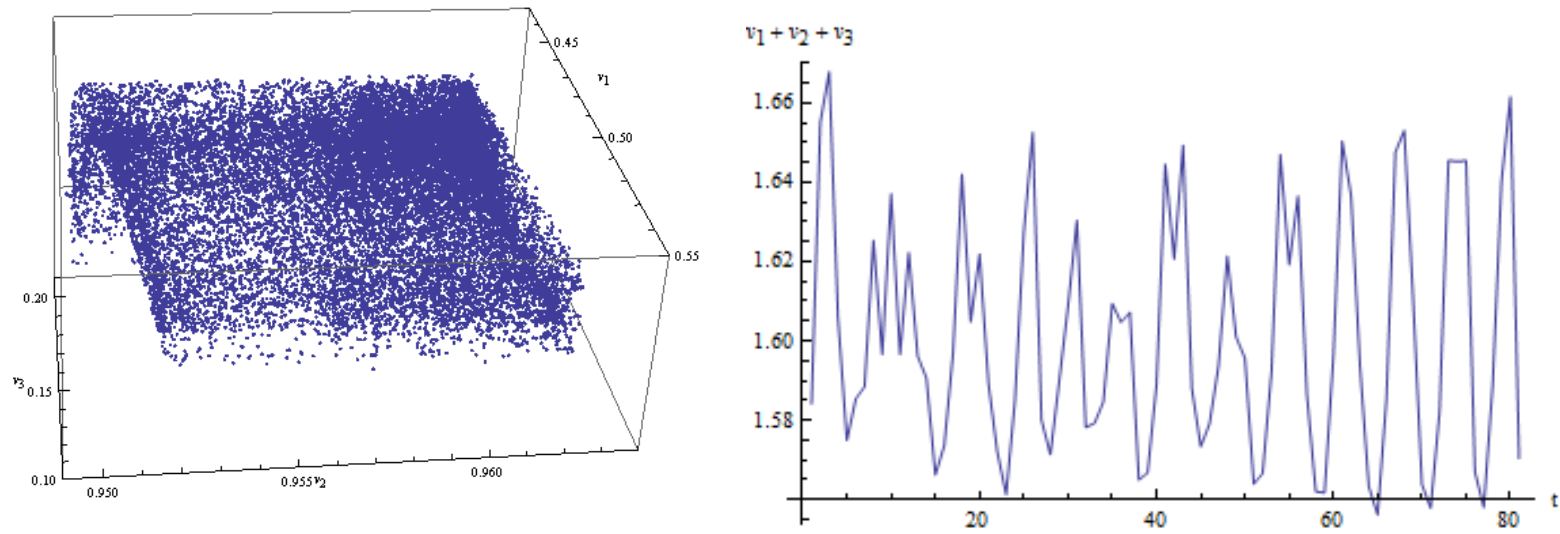


Figure 3

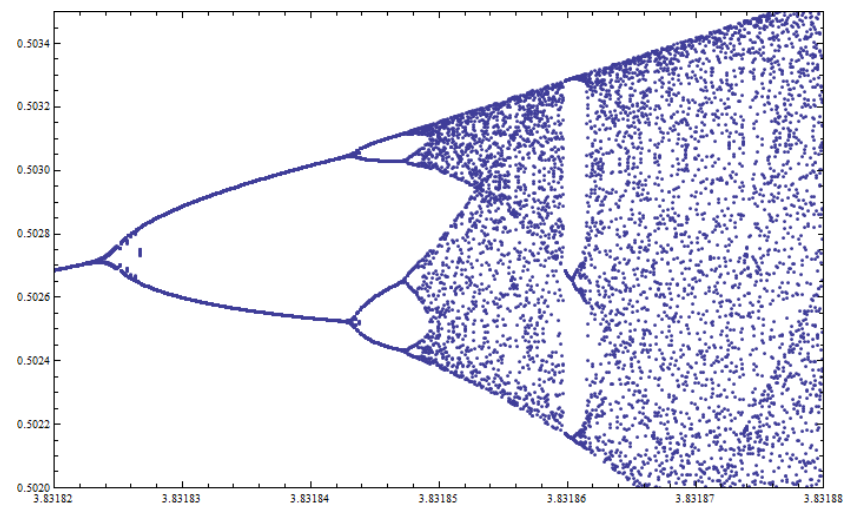
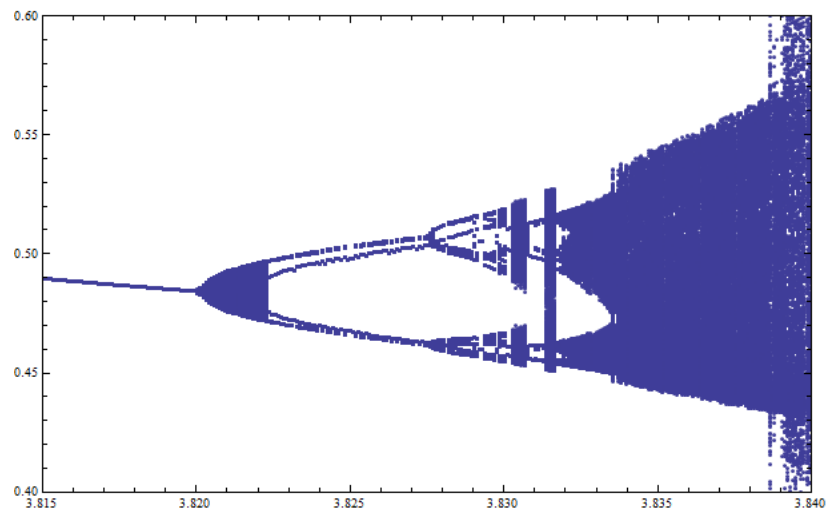
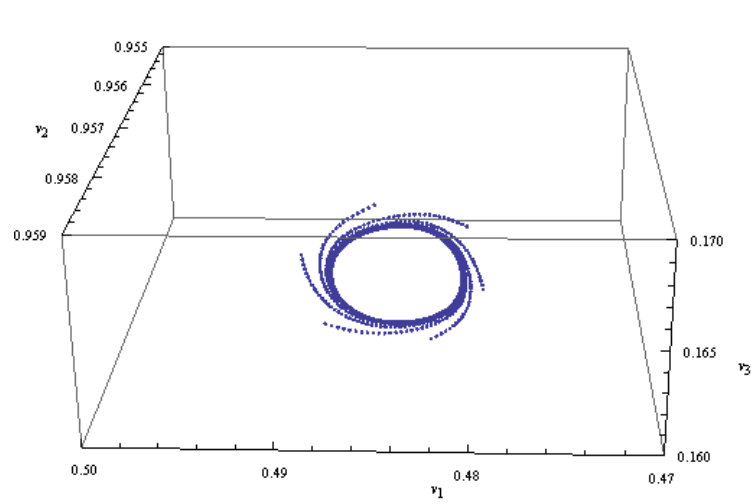
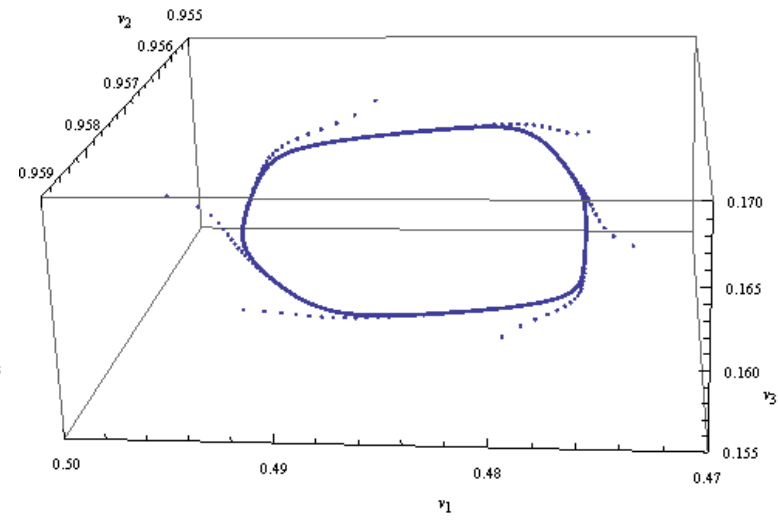


Figure 4



$$\pi_{21} = 3.8203$$



$$\pi_{21} = 3.821$$

Figure 5

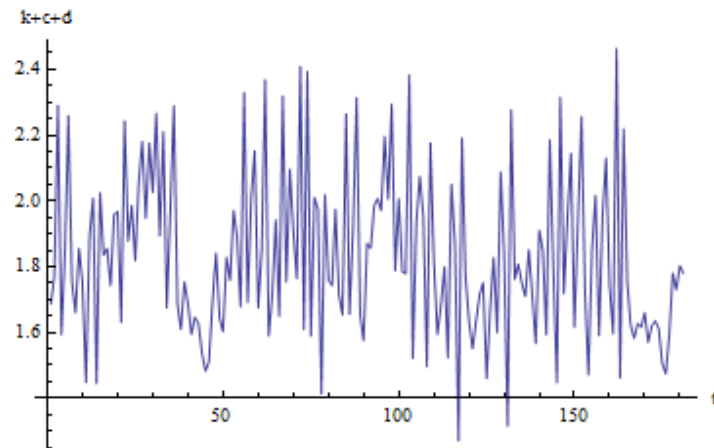
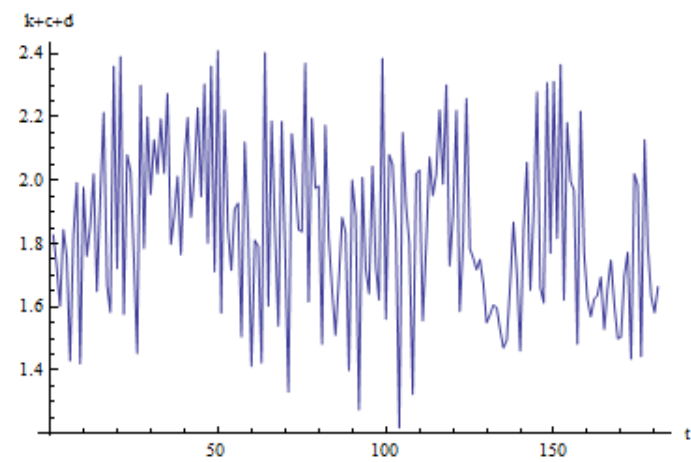
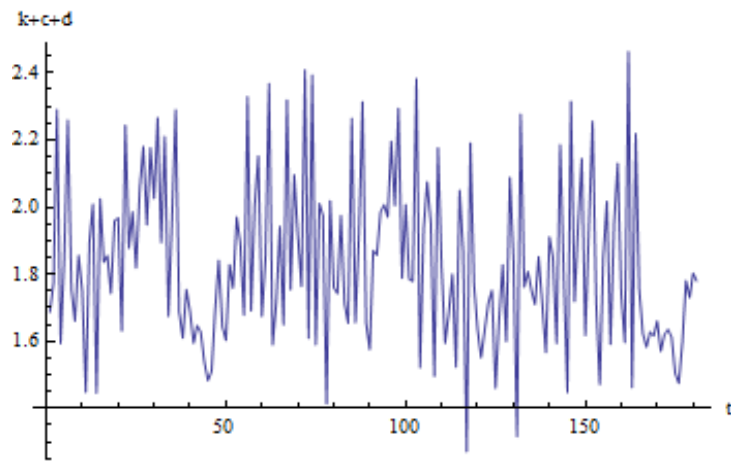


Figure 6

References

- Benhabib, J., and R. H. Day (1981): “Rational Choice and Erratic Behaviour,” *Review of Economic Studies*, 48, 459-471.
- Brown, T. M. (1952): “Habit Persistence and Lags in Consumer Behavior,” *Econometrica*, 20, 355-371.
- Crutchfield, J. P., J. D. Farmer, and B. A. Hubermann (1982): “Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics,” *Physical Representations*, 92, 45-82.
- Day, R. H. (1970): “Rational Choice and Economic Behavior,” *Theory and Decision*, 1, 229-251.
- Day, R. H., and P. E. Kennedy (1971): “Recursive Decision Systems: An

Existence Analysis,” *Econometrica*, 38, 666-681.

Dohtani, A., T. Misawa, T. Inaba, M. Yokoo, and T. Owase (1996): “Chaos, Complex Transients and Noise: Illustration with a Kaldor Model,” *Chaos, Solitons & Fractals*, 7, 2157-2174.

Georgescu-Roegen, N. (1950): “The Theory of Choice and the Consistency of Economic Law,” *Quarterly Journal of Economics*, 44, 125-138.

Gaertner, W., and J. Jungeilges (1988): “A Non-Linear Model of Interdependent Consumer Behaviour,” *Economics Letters*, 27, 145-150.

Gaertner, W., and J. Jungeilges (1993): “Spindles’ and Coexisting Attractors in a Dynamic Model of Interdependent Consumer

Behavior,” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 21, 223-231.

Gorman, W. N. (1967): “Tastes, Habits and Choices,” *International Economic Review*, 8, 212-222.

Marotto, F. R. (1979): “Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 72, 716-729.

McCarthy, M. D. (1974): “On the Stability of Dynamic Demand Systems,” *International Economic Review*, 15, 256-259.

Modigliani, F. (1949): “Fluctuations in the Income-Saving Ratio: A Problem in Economic Forecasting,” *Studies in Income and Wealth*, 11,

(New York: National Bureau of Economic Research).

Pareto, V. (1964): “Bousquet, G. H. and Busino, G. (eds.) *Cours D’economie Politique* (Geneva: Librairie Droz) Volume 2, Chapter 3, Section 928, 280-285.

Pollak, R. A. (1970): “Habit Formation and Long-Run Utility Function,” *Journal of Political Economy*, 78, 745-783.

Weizsacker, C. C. Von (1971): Notes on Endogenous Changing Tastes,” *Journal of Economic Theory*, 3, 345-372.