課題　1．運動の記述　解答および解説

今回の課題は微積分の確認のようなものです．

1．質点の位置$(x,\ y)$が時刻 t の関数として，（1）～（3）のように与えられている．それぞれの場合について，速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ．

（1）　$x=2t+3,\ y=-t+2$

（2）　$x=2\cos(2\pi t),\ y=\sin(2\pi t)$

（3）　$x=t,\ y=\sin(\pi t)$

位置ベクトル，速度ベクトル，加速度ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ とする．

（1）$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+3\\-t+2\end{pmatrix}$ ゆえ，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

（2）$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos(2\pi t)\\\sin(2\pi t)\end{pmatrix}$ ゆえ，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}-4\pi\sin(2\pi t)\\2\pi\cos(2\pi t)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\begin{pmatrix}-8\pi^2\cos(2\pi t)\\-4\pi^2\sin(2\pi t)\end{pmatrix}$

（3）$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\\sin(\pi t)\end{pmatrix}$ ゆえ，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1\\\pi\cos(\pi t)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\begin{pmatrix}0\\-\pi^2\sin(\pi t)\end{pmatrix}$

三角関数の微分があやしい場合は，確認しておくこと．これから，たくさん使います．

2．質点の位置(x, y)が時刻 t の関数として，

$$x=Vt$$
$$y=\alpha t^2+\beta$$

と表されているものとする（ただし，V,　α,　βは定数）．速度ベクトル $\boldsymbol{v}$，加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ およびそれらの大きさ v, a を時刻の関数として求めよ．（なお，速度の大きさを速さという）

位置ベクトル，速度ベクトル，加速度ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ とする．

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Vt\\\alpha t^2+\beta\end{pmatrix}\ \text{ゆえ，}\ \boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}V\\2\alpha t\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\begin{pmatrix}0\\2\alpha\end{pmatrix}$$

速さ（速度ベクトルの大きさ）v は

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{V^2+4\alpha^2t^2}$$

加速度ベクトルの大きさは

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4\alpha^2}=2|\alpha|$$ ．．．αが正とは限らないことに注意（細かいことだが）

これも微分して，ベクトルの大きさを求めるだけ．

3. 直線上を運動する質点の速度が

$v = Ve^{-kt}$

で与えられるとする. V, k は定数である.

1）質点の加速度を求めよ.

2）時刻 $t=0$ で $x=0$ にあった質点の位置 $x(t)$を求めなさい.

1）加速度を a とすると,

$$a = \dot{v} = -Vke^{-kt}$$

2）$\dfrac{dx}{dt} = v = Ve^{-kt}$　両辺を時刻 0 から t まで積分すると,

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'}dt' = \int_0^t Ve^{-kt'}dt'$$

$$x(t) - x(0) = \left[-\frac{V}{k}e^{-kt'}\right]_0^t = -\frac{V}{k}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

ここで $x(0)=0$ ゆえ,

$$x(t) = \frac{V}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

指数関数の微積分もたくさん使うので, あやしい場合は確認しておくこと.

4. 直線上を運動する質点の加速度が $-a\cos\omega t$ で与えられているとする. 速度 v および位置 x を時刻 t の関数として求めなさい. ただし, 時刻 $t=0$ における速度および位置を v_0, x_0 とする.

$$\frac{dv}{dt} = -a\cos\omega t$$

両辺を積分して

$$\int_0^t \frac{dv}{dt'}dt' = -a\int_0^t \cos\omega t dt'$$

$$v(t) - v(0) = -a\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t'\right]_0^t = -\frac{a}{\omega}\sin\omega t$$

$$v(t) = -\frac{a}{\omega}\sin\omega t + v_0$$

さらに両辺を積分して

$$\int_0^t \frac{dx}{dt'}dt' = \int_0^t\left(-\frac{a}{\omega}\sin\omega t + v_0\right)dt'$$

$$x(t) - x(0) = \left[\frac{a}{\omega^2}\cos\omega t' + v_0 t'\right]_0^t = \frac{a}{\omega^2}(\cos\omega t - 1) + v_0 t$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2}(\cos\omega t - 1) + v_0 t + x_0$$

5. 一定の加速度 a で直線運動している物体がある．ある時刻には速度 v_0 であった．これから距離 x だけ変位したときの速度は v_1 であった．このような状況が与えられた場合，受験参考書等では必ず

$$v_1{}^2 - v_0{}^2 = 2ax$$

を用いているようだが，これを証明しなさい．

速度が v_0，v のときの時刻をそれぞれ t_0，t とする．

$$\frac{dv}{dt} = a$$

両辺を積分すると，

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt'}dt' = \int_{t_0}^{t} a dt'$$

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \qquad (1)$$

また，$\dfrac{dx}{dt} = v$　より

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt'}dt' = \int_{t_0}^{t_1} v dt' = \int_{t_0}^{t_1} [v_0 + a(t - t_0)]dt'$$

$$x(t_1) - x(t_0) = x = \left[v_0 t + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \right]_{t_0}^{t_1} = v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 \qquad (2)$$

式(1)で $t=t_1$ とすると，

$$v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

これを式(2)に代入して，

$$x = v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_1 - v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_1{}^2 - v_0{}^2}{2a}$$

したがって，

$$v_1{}^2 - v_0{}^2 = 2ax$$

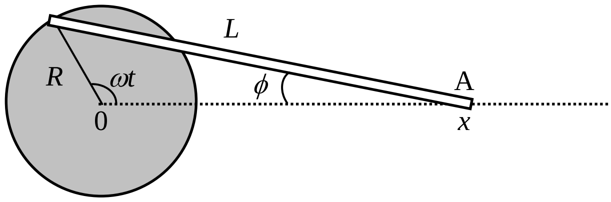
この問題を出題するのは，これを使わなければならない，これを使うと便利，という意図ではありません．むしろ，これを使わずに，微分積分だけで考えた方が簡単ということを理解してほしいからです．そもそも，この式は加速度が一定という条件でしか使えないので，あまり一般性はありません．

“法則”は自然が決めたことですから覚えるしかありませんが，“公式”は人が導いたものなので，いつでも導けます（覚えなければならないというほどのものではない）．むしろ，どのようにして導かれたかをかすかにでも記憶しておいた方がよいでしょう．

6．図のように，一定の角速度ωで回転する半径 R の円盤の周上につながれた，長さ L の棒がある．棒の他端 A は，円盤の中心を通る直線上を動くようになっている．棒の傾きをϕとする．円盤の中心を原点とし，A の位置を $x(t)$とする．

（1）$\sin\phi$ を ωt, R, L を用いて表しなさい．

（2）$x(t)$ をωt, R, L を用いて表しなさい．



（1）正弦定理より

$$\frac{R}{\sin\phi} = \frac{L}{\sin\omega t}$$

したがって，

$$\sin\phi = \frac{R}{L}\sin\omega t$$

（2）（L と R の x 軸上への正射影を考える）

$$x(t) = L\cos\phi + R\cos\omega t$$

（本来，これでおしまいなのだが，ϕが含まれているので，これを（1）の結果を使って書き換えておく．）

図から $-\pi/2<\phi<\pi/2$ と考えてよいので，$\cos\phi>0$. したがって，

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\sin\omega t\right)^2}$$

これをはじめの式に代入して

$$x(t) = L\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\sin\omega t\right)^2} + R\cos\omega t$$ このまま（かっこつきのままで）でよいでしょう．