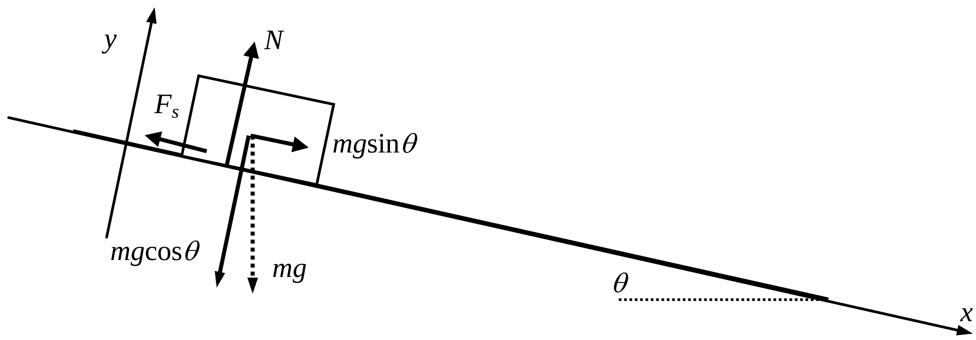
課題　3. 摩擦を伴う運動　解答および解説

必要な場合は重力加速度を g としなさい.

1. 斜面（傾き：θ）に置いた物体（質量：m）が斜面下向きに滑り出さないためには，傾きθはどのような条件を満たさなければならないか．静止摩擦係数はμ_sとする.

解答

まずは，図を描きましょう.



運動方程式

斜面方向（x 軸方向）

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - F_s \qquad (1)$$

斜面に垂直な方向（y 軸方向）

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\theta \qquad (2)$$

静止状態では，x，y は変化しないので，　　**ここの説明は省略しないこと！**

$$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$$

(1)，(2)より，

$$F_s = mg\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta$$

滑り出さない条件は，

$$F_s < \mu_s N$$

ゆえ，

$$mg\sin\theta < \mu_s mg\cos\theta$$

したがって，

$$\tan\theta < \mu_s$$

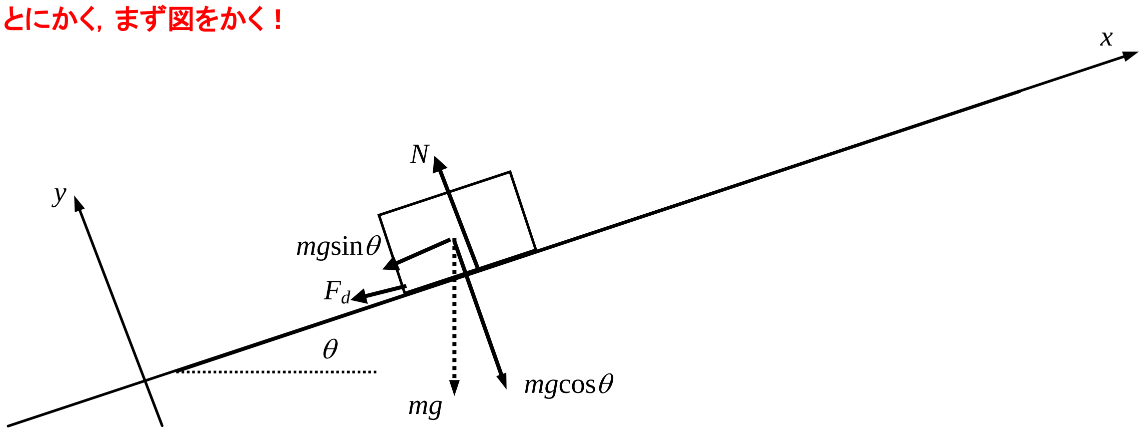
$$\theta < \tan^{-1}\mu_s$$

であればよい.

不等号に等号が入っていてもかまいません.
静止摩擦力が，静止摩擦係数と垂直抗力で決まる最大静止摩擦力の値を取るのは，あくまでも滑り出す瞬間です．したがって，運動方程式の中で最大静止摩擦力を使ってはいけません.

2．物体（質量：m）を初速度 V で斜面上向きに打ち出した（傾き：θ）．物体は斜面上を滑りながら，どれだけの距離を上がることができるか．動摩擦係数はμ_dとする．

とにかく，まず図をかく！



運動方程式

斜面方向（x 軸方向）

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - F_d \tag{1}$$

斜面に垂直な方向（y 軸方向）

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\theta = 0 \tag{2}$$

斜面上を滑ることから，(2)より，

$$N = mg\cos\theta$$

動摩擦力は，

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$$

これを(1)に代入して

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = -mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$$

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$$

これを積分して，

$$\dot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)t + C$$

初期条件（v_x=V at t=0）から，C=0．したがって，

$$\dot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)t + V \tag{3}$$

積分して，

$$x = -\frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)t^2 + Vt + C$$

初期条件（x=0 at t=0）より，C=0．したがって，

$$x = -\frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)t^2 + Vt \tag{4}$$

最高点に達する時刻を t_1 とすると，(3)より

$$\dot{x} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)t_1 + V = 0$$

のときだから，

$$t_1 = \frac{V}{g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)} \tag{5}$$

これを(4)に代入して，

$$x=-\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\frac{V^2}{g^2(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)^2}+V\frac{V}{g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}$$

$$=-\frac{V^2}{2g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}+\frac{V^2}{g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}$$

$$=\frac{V^2}{2g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)} \qquad (6)$$

別解

(4)より,

$$x=-\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)t^2+Vt$$

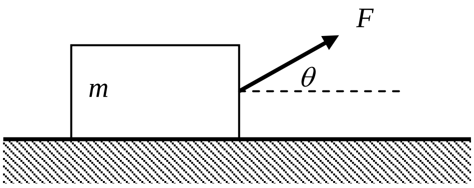
$$=-\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\left[t^2-\frac{2V}{g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}t\right]$$

$$=-\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\left\{\left[t-\frac{V}{g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}\right]^2-\frac{V^2}{g^2(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)\left[t-\frac{V}{g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}\right]^2+\frac{V^2}{2g(\sin\theta+\mu_d\cos\theta)}$$

これから，最高点に達する時刻と，そのときの距離がわかる.

３．図のように，水平面上を物体（質量：m）が一定の速度で動いている．物体には水平面からの角度θ $(0<\theta<\pi/2)$の方向に大きさ F の力が働いており，面と物体との間の動摩擦係数はμ $(0<\mu<1)$である.



（１）力 F を他の文字を用いて表しなさい.

（２）一定の速度を保つのに必要な力 F が最小になる角度θを求めなさい.

解答

（１） 水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる．垂直抗力を N，動摩擦力を F_dとすると，運動方程式は

$$m\ddot{x}=F\cos\theta-F_d \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}=F\sin\theta+N-mg \qquad (2)$$

水平面上を動くことから y=const.ゆえ(2)より

$$N=mg-F\sin\theta \qquad (3)$$

したがって，(1)を書き換えると,

$$m\ddot{x}=F\cos\theta-\mu(mg-F\sin\theta)$$

一定の速度で動いていることから，加速度はゼロだから,

$$F(\cos\theta+\mu\sin\theta)=\mu mg$$

したがって,

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta} \qquad (4)$$

（2）(4)において分子は定数なので，力 F が最小になるのは分母が最大になるとき.

分母は

$$\cos\theta+\mu\sin\theta=\sqrt{1+\mu^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形できる。ただし，

$$\tan\alpha=\frac{1}{\mu} \ ,\ \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$ （$\tan^{-1}$ は tan の逆関数を表わす）

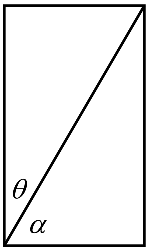
であり，$0<\mu<1$　ゆえ，$\pi/4<\alpha<\pi/2$.

分母が最大になるのは，$\sin(\theta+\alpha)=1$　のときであり，$0<\theta<\pi/2$，$\pi/4<\alpha<\pi/2$ であるから，

$$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$$

したがって，

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)=\tan^{-1}\mu$$



※θとαは補角の関係にあるので，tangent は互いに逆数になる.

以上から，F が最小になる角度は，

$$\theta=\tan^{-1}\mu.$$

（別解）分母を

$$f(\theta)=\cos\theta+\mu\sin\theta$$

とおくと，

$$f'(\theta)=-\sin\theta+\mu\cos\theta=\cos\theta(\mu-\tan\theta)$$

$0<\theta<\pi/2$ の範囲での増減表は下のようになる.（$\cos\theta>0$. $\tan\theta$はどんな関数か？）

θ	0		θ^*		$\pi/2$
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

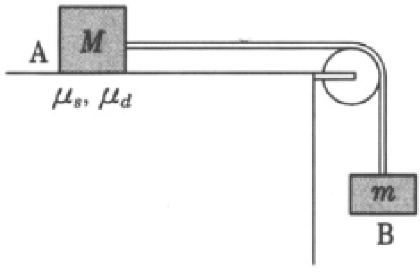
ただし，

$$\tan\theta^*=\mu \quad \text{すなわち，} \quad \theta^*=\tan^{-1}\mu$$

以上から，F が最小になる角度は，

$$\theta=\tan^{-1}\mu$$

4．図のように，粗い水平面に質量 M の物体 A が置かれ，それが滑車を通して質量 m の物体 B とつながれている．水平面の静止摩擦係数をμ_s，動摩擦係数をμ_dとする．m を増していってある値になったとき2物体は動き出した．そのときの物体 B の質量 m を求めよ．また，そのときの2物体の加速度を求めよ．



解答

(1) 滑り出す前

水平方向右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる.

物体 A の運動方程式は

$$M\ddot{X} = T - F_s, \quad M\ddot{Y} = N - Mg \tag{1}$$

ここで，T はひもの張力，F_s は静止摩擦力，N は面からの垂直抗力である.

物体 B の運動方程式は

$$m\ddot{y} = T - mg \tag{2}$$

静止した状態では加速度はすべてゼロであり，(1)，(2)より，

$$F_s = T = mg \tag{3}$$

また，(1)より，

$$N = Mg \tag{4}$$

滑り出すのは，$F_s = \mu_s N = \mu_s Mg$ のときだから，(5)より，

$$mg = \mu_s Mg \quad \Rightarrow \quad m = \mu_s M \tag{5}$$

(2) 滑り出した後

物体 A の運動方程式は

$$M\ddot{X} = T - F_d, \quad M\ddot{Y} = N - Mg \tag{6}$$

ここで，F_d は動摩擦力である．物体 A が面上を動くことから，鉛直方向の加速度はゼロであり，

$$N = Mg \tag{7}$$

したがって，(6)の第１式は

$$M\ddot{X} = T - \mu_d N = T - \mu_d Mg \tag{8}$$

と書き換えることができる.

物体 B の運動方程式は

$$m\ddot{y} = T - mg \tag{9}$$

ところで，物体 A の水平方向右向きの加速度と物体 B の鉛直方向下向きの加速度は等しいので（一体となって動くので），それをα(>0)として $\ddot{X} = \alpha$， $\ddot{y} = -\alpha$ とおくことができる．これを(10)，(11)に代入すると，

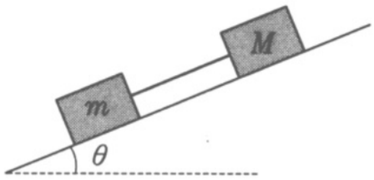
$$M\alpha = T - \mu_d Mg \tag{12}$$

$$-m\alpha = T - mg \tag{13}$$

(11)，(12)，(6)より，

$$\alpha = \frac{(m - \mu_d M)}{M + m} g = \frac{(\mu_s - \mu_d)M}{(1 + \mu_s)M} g = \frac{\mu_s - \mu_d}{1 + \mu_s} g$$

5. 水平からの角度がθである斜面に糸でつながれた2つの物体が上下に離して置いてある．質量 M の上側の物体は粗い底面をもち，斜面との静止摩擦係数はμ_s である．質量 m の下側の物体は滑らかな底面をもっている．θを増加させて滑りがはじまるときのθの値を求めよ．



解答　斜面方向下向きに x 軸，斜面に垂直に上向きに y 軸をとる．

上側の物体の運動方程式は，

$$M\ddot{X} = Mg\sin\theta + T - F_s \qquad (1)$$

$$M\ddot{Y} = N - Mg\cos\theta \qquad (2)$$

ただし，T は糸の張力，F_s は静止摩擦力，N は斜面からの垂直抗力である．

下側の物体の運動方程式は，

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - T \qquad (3)$$

$$m\ddot{y} = N' - mg\cos\theta$$

ただし，N'は斜面からの垂直抗力である．静止状態では，すべての加速度はゼロ．

(2)より，

$$N = Mg\cos\theta \qquad (4)$$

(3)より，

$$T = mg\sin\theta$$

(1)より，

$$F_s = Mg\sin\theta + T = (M+m)g\sin\theta \qquad (5)$$

滑りはじめるのは，

$$F_s = (F_s)_{Max} = \mu_s N$$

のときなので，(4)，(5)より，

$$(M+m)g\sin\theta = \mu_s Mg\cos\theta$$

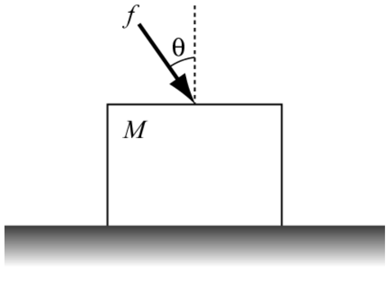
したがって，

$$\tan\theta = \frac{\mu_s M}{M+m} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s M}{M+m}\right)$$

6. 水平な粗い床の上に質量 M の物体を置き，物体の上面に鉛直と角θをなす方向に大きさ f の力を加えて押さえつける．床と物体の間の静止摩擦係数をμ_sとする．

（1）f をどんなに大きくしても物体がすべり出さないためには，θはどのような範囲になければならないか．

（2）θを増していって物体がちょうどすべり出すときの，比 f/Mg の値を求めよ．



解答

（1）　物体にはたらく力は，重力 Mg，床からの抗力 N，上面にかけた力 f，図で左向きにはたらく静止摩擦力 Fs

の4つ．水平方向右向きに x 軸，鉛直方向上向きに y 軸をとって運動方程式を考えると，

$$M\ddot{x} = f\sin\theta - F_s \qquad (1)$$

$$M\ddot{y} = N - Mg - f\cos\theta \qquad (2)$$

静止している状態を考えると，加速度がゼロであるから，(1)，(2)より，

$$F_s = f\sin\theta,\quad N = Mg + f\cos\theta$$

滑り出さない条件とは，静止摩擦力 F が最大静止摩擦力よりも小さいということだから，

$$F_s < \mu_s N$$

これに(1)と(2)を代入して，

$$f\sin\theta < \mu_s\left(Mg + f\cos\theta\right)$$

問題はθの範囲を求めることであったから，ひとまずこれをθの条件式に変形しておくと，

$$\sin\theta - \mu_s\cos\theta < \frac{\mu_s Mg}{f} \qquad (3)$$

これが $f\to\infty$ の極限でも成り立っている必要がある．$f\to\infty$ のとき，$\dfrac{\mu_s Mg}{f}\to 0$ だから，

条件は，

$$\sin\theta - \mu_s\cos\theta < 0 \quad , \quad \tan\theta < \mu_s$$ あるいは，$\theta < \tan^{-1}\mu_s$

（２） 物体がちょうど滑り出すときは，

$$F_s = \mu_s N$$ より，$$\sin\theta - \mu_s\cos\theta = \frac{\mu_s Mg}{f}$$

したがって，

$$\frac{f}{Mg} = \frac{\mu_s}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$$

7．水平からの角度がαである斜面上を，傾斜が最大の方向に初速 V_0 で滑り下りはじめた物体がある．斜面と物体の間の動摩擦係数をμ_dとする．

（1）物体が止まらずに滑り続けるための条件を求めよ．

（2）L だけの距離を滑ったのちの速度を求めよ．

解答

（1）斜面方向下向きに x 軸，斜面に垂直な上向きに y 軸をとり，滑り始めた点を原点とする．

運動方程式は，

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_d \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha$$

物体は斜面上を動くので，$\ddot{y} = 0$ であり，

$N = mg\cos\alpha$．したがって，$F_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\alpha$

これを(1)に代入して，

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)mg$$

したがって，

$$\ddot{x} = (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)g \qquad (2)$$

物体が止まらないための条件は，

$\ddot{x} \geq 0$ （負であると，いずれは速さがゼロになる）

したがって，(2)より，

$$\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha \geq 0$$

または，

$$\tan\alpha \geq \mu_d$$

（2）(2)および初期条件（$\dot{x}(0) = V_0$， $x(0) = 0$）から，

$$\dot{x} = (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gt + V_0 \qquad (3)$$

$$x = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gt^2 + V_0 t$$

$t = T$ のときに L だけ進んだとすると，

$$L = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gT^2 + V_0 T \quad \Rightarrow \quad (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gT^2 + 2V_0 T - 2L = 0$$

T はこの２次方程式の解だから，

$$T = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gL}}{(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)g} \quad （\because T > 0）$$

これを(3)に代入して，

$$v(T) = (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gT + V_0 = \sqrt{V_0^2 + 2(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)gL}$$