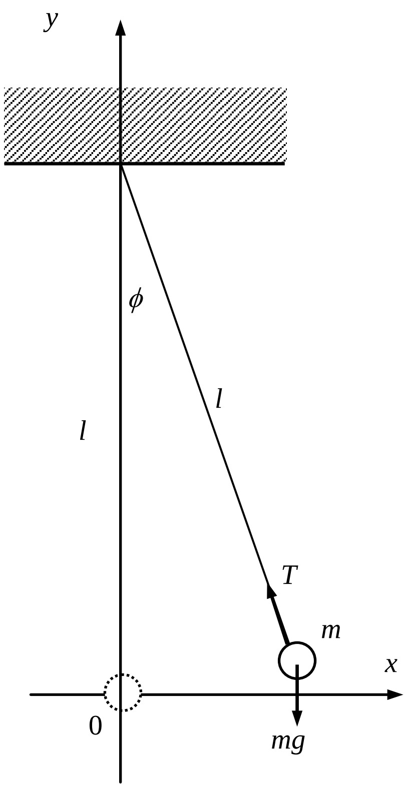
課題 4．単振動 解答および解説

必要ならば，必要ならば，重力加速度を g としなさい．

1．天井から吊り下げた単振り子（ひもの長さ：L，おもりの質量：m）の運動方程式をたて，その解を求めなさい．また，振動の周期および振動数を求めなさい．



水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸をとる．

ひもが鉛直下向きとなす角をϕとすると，おもりの位置は，

$$x = l\sin\phi$$
$$y = l - l\cos\phi$$

ひもの張力の大きさを T とすると，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -T\sin\phi = -T\frac{x}{l}$$
$$m\ddot{y} = T\cos\phi - mg$$

微小角の振動を考え，

$$\phi \approx 0$$

とする．このとき，

$$\cos\phi \approx 1 = const.$$

ゆえ，

$$y = 0$$
$$m\ddot{y} = m\cdot 0 = T\cos\phi - mg = T - mg$$
$$T = mg$$

したがって，

$$m\ddot{x} = -T\frac{x}{l} = -m\frac{g}{l}x \qquad \text{すなわち，} \qquad \ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

これは，

$$x(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

の形の解をもつ．ただし，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

振動の周期および振動数は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

----

t=0 において x=a，v_x=0 とすると，振幅，初期位相は

A=a

θ=π/2

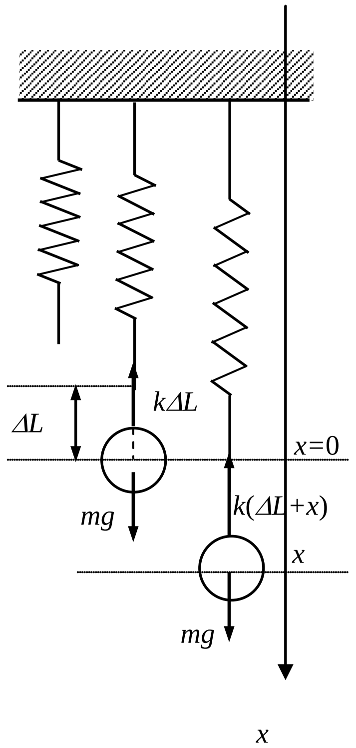
となる．

2. (1) 自然長 L_0 のばね(ばね定数: k)を天井から吊り下げる. 質量 m のおもりを静かに下げると, ばねはΔLだけ伸びておもりは静止した. このときのばねの伸びΔL を求めよ. なお, ばねの質量は無視できるほど小さいものとする.

(2) 鉛直下向きに x 軸をとり, (1)のつりあいの位置を x=0 とする. 手でおもりを a だけ下向きに引っ張り, t=0 に手を放した. おもりの位置を x として, その運動方程式をたて, 解を求めなさい.

(1) ばねにおもりを下げると, ばねはΔL だけ伸びておもりは静止する. 鉛直下向きに x 軸をとると

$$m\ddot{x} = -k\Delta L + mg = 0$$



これから,

$$\Delta L = \frac{mg}{k} \qquad ①$$

(2) 手でおもりを a だけ下向きに引張り, t=0 に手を放す.

おもりの運動方程式(位置 x のときの加速度と力の関係)は,

$$m\ddot{x} = -k(\Delta L + x) + mg$$

①を代入して,

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (2)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad (3)$$

この解を求めると,

$$x = A\sin(\omega t + \theta) \qquad (4)$$

ただし,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

初期条件より, 振幅, 初期位相は

A=a, θ=$\pi/2$

となるので, 求める解は

$$x(t) = a\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

振動の周期は,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動数は,

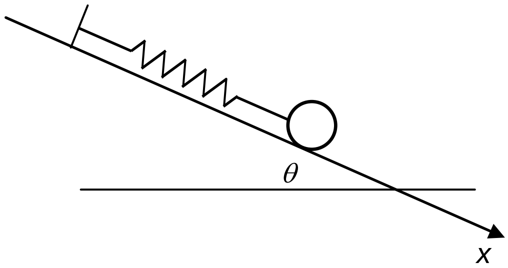
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

3．自然長 l，バネ定数 k のバネがあり，一端に質量 m の物体が付いている．このバネを角 θ の摩擦のない斜面上でもう一端を固定し，面上で最大傾斜方向に振動させたときの角振動数を求めよ．

右のように考える．自然長からの伸びが Δl で静止している状態を考える．

$$mg\sin\theta - k\Delta l = 0$$

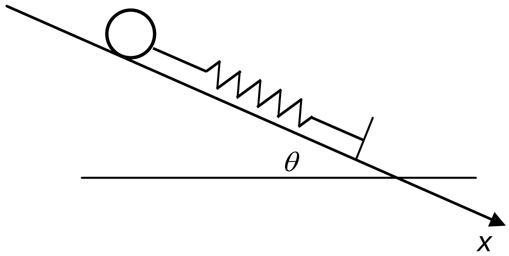
この位置を原点として斜面方向下向きに x 軸をとると運動方程式は，



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - k(x + \Delta l) = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

下のように考えた場合も，まったく同様に扱える．



この微分方程式の一般解は

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

と表される．求める角振動数は，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ばねとおもりが共通であれば，水平でも鉛直でも斜めでも振動数は同じ！

4．自然長 l_0 のバネの片方の端を固定し，他端に質量 m のおもりをつけて，摩擦のない水平面上で振動させたところ，角振動数 ω で振動した．このバネを鉛直につるして同じおもりをつけると，長さはいくらになるか．また，その状態で振動させると，どのような振動をするか．

このバネのバネ定数を k とする．水平面内でのおもりの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{であり，} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

この微分方程式は，角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

の単振動を解にもつ．したがって，

$$k = m\omega^2$$

このバネを鉛直につるしたときのバネの伸びを d とすると，

$$kd = mg \quad \text{ゆえ，} \quad d = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{m\omega^2} = \frac{g}{\omega^2}$$

したがって，バネの長さは

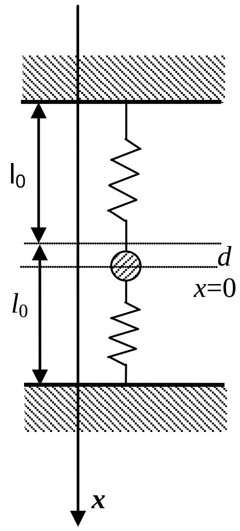
$$l_0 + d = l_0 + \frac{g}{\omega^2}$$

振動は，水平の場合と同様，角振動数 ω の振動．（問題2から分かるでしょう）

5. 図のように，自然長 l_0 の2本のバネ（バネ定数：k）の間に，質量 m のおもりをつけ，高さ $2l_0$ の天井と床にその両端を固定する．なお，おもりの大きさは無視できるものとする．

（1）おもりは床から高さ l_0 の位置から d だけ下がって静止した．おもりにはたらく力のつりあいを考え，d を与えられた他の文字を用いて表しなさい．

（2）おもりを静止していた位置（図のように，ここを x=0 とする）から a だけ下に引っ張って放す（これを t=0 とする）．運動方程式をたて，おもりの位置を時間の関数として表しなさい．



（1）上のバネは d 伸びており，おもりに上向きの力 kd を及ぼす．
下のバネは d 縮んでおり，おもりに上向きの力 kd を及ぼす．
おもりには他に重力が働いている．したがって，つりあいの式は，

$$2kd - mg = 0$$

したがって，

$$d = \frac{mg}{2k}$$

（2）おもりの位置が x のとき，上のバネの伸びは d+x，下のバネの縮みは d+x であるから，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -2k(d + x) + mg$$

（1）の結果を用いると，

$$m\ddot{x} = -2kx$$

したがって，

$$\ddot{x} = -\frac{2k}{m}x = -\omega^2 x\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

この微分方程式の解は，一般に

$$x = A\sin(\omega t + \theta)$$

と表される．初期条件は

$$x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$$

ゆえ，

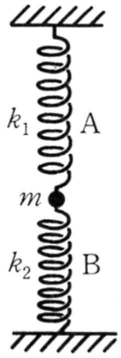
$$x(0) = A\sin\theta = a$$

$$\dot{x}(0) = A\omega\cos\theta = 0$$

これから，$\theta=\pi/2$，$A=a$ を得る．したがって，

$$x = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a\cos\omega t = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

6．図のように，質量 m の物体の上下にバネ定数 k_1 と k_2，自然長 l_1 と l_2 の軽いバネ A，B を取り付け，バネの他端を天井と床に固定する．



（1）物体が静止しているときのバネ A，B の長さを x_1，x_2 として，力のつり合いの式を書け．

（2）物体を上下に振動させるとき，その周期はいくらになるか．物体が静止していたときの位置を原点とし，鉛直下向きを正に x 軸をとって考えよ．

バネ A は伸び，バネBは縮む．

（1）つりあいの位置にあるとき，バネ A の自然長からの伸びは $x_1 - l_1$，バネ B の自然長からの縮みは

$l_2 - x_2$ で，これらの力はどちらも鉛直上向きにはたらいているから，

$$mg = k_1(x_1 - l_1) + k_2(l_2 - x_2) \quad \cdots ①$$

（2）位置 x が正のときを考えてみる．バネ A の自然長からの伸びは $x_1 - l_1 + x$，バネ B の自然長からの縮みは $l_2 - x_2 + x$ であるから，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k_1(x_1 - l_1 + x) - k_2(l_2 - x_2 + x) = -(k_1 + k_2)x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m}x = -\omega^2 x \quad \text{ただし，} \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

この微分方程式の一般解は

$$x = A\sin(\omega t + \theta)$$

であり，振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$