課題 5. 運動方程式(3)円運動 解答

1. 質量 m の自動車が半径 r のカーブを速さ v で走行している(タイヤがスリップすることはない)。

(1) この自動車に働いている向心力の大きさを求めなさい。

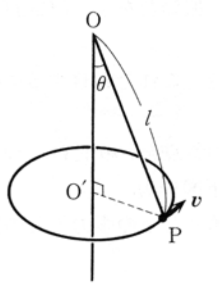
角速度をωとすると,

$$f=mr\omega^2=mr\left(\frac{v}{r}\right)^2=m\frac{v^2}{r}$$

(2) この向心力は何から受けるどんな力か。

地面から受ける静止摩擦力(スリップしていないので)。これは自動車が地面を水平方向(半径方向外向き)に押す力の反作用になっている。

2. 長さ l の軽い糸の一端を天井に固定し,他端に質量 m の質点を取りつけて鉛直軸のまわりに水平面内で円運動させる.鉛直方向からの糸の傾きはθであった.質点の(接線方向の)速さ v を重力加速度 g, l, θで表せ.



鉛直方向には運動しないので,張力の鉛直成分と重力はつりあっている.

$$T\cos\theta=mg \qquad ①$$

水平面内では円運動している.その向心力は張力 T の水平成分 $T\sin\theta$ であり,①より

$$T\sin\theta=mg\tan\theta \qquad ②$$

円運動の向心力を質点の速度を用いて表すと,円運動の半径は $l\sin\theta$ だから,

$$mr\omega^2=m\omega^2 l\sin\theta=m\frac{v^2}{l\sin\theta} \qquad ③$$

②,③より,

$$mg\tan\theta=m\frac{v^2}{l\sin\theta} \qquad \therefore v=\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta}$$

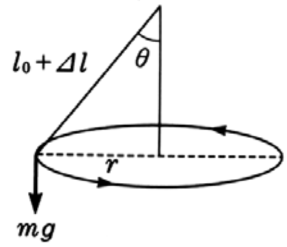
3. バネ定数 k, 自然長 l_0 のバネの一端に質量 m のおもりがついている.以下の問に答えよ.

(1)他端を滑らかで水平な床に固定し,おもりを床の上で円運動させた.円運動の角速度がωのとき,バネの伸びΔlを求めよ.

バネの張力が向心力となって円運動するので

$$m(l_0+\Delta l)\omega^2=k\Delta l \quad したがって,\quad \Delta l=\frac{ml_0\omega^2}{k-m\omega^2}$$

（2）他端を天井に固定し，図のようにバネが鉛直方向から角θだけ傾いた状態で，おもりに水平面内で角速度がωの円運動をさせた．このとき，バネの伸び$\varDelta l$および$\cos\theta$を求めよ（図中に示したrは用いずに表せ）．



鉛直方向には運動しないので，張力の鉛直成分と重力はつりあっている．

$$k\Delta l\cos\theta = mg \qquad ①$$

水平面内では円運動している．張力の水平成分が向心力になっているので，

$$mr\omega^2 = k\Delta l\sin\theta \qquad ②$$

また，

$$r = \left(l_0 + \Delta l\right)\sin\theta \qquad ③$$

②，③より，

$$\varDelta l = \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2}$$ これを①に代入して $$\cos\theta = \frac{g\left(k - m\omega^2\right)}{kl_0\omega^2}$$

4．地表付近の重力加速度をgとする。地表すれすれの軌道（半径R）を回る人工衛星の周期Tを求めよ。人工衛星は重力を向心力として等速円運動するものと考えなさい。

重力を向心力として等速円運動しているので，人工衛星の質量をmとすると

$$mR\omega^2 = mg$$

したがって，

$$\omega^2 = \frac{g}{R}，\ \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$