課題　６．万有引力の法則と重力

１．地球の表面にある物体について，以下の問いに答えなさい．必要ならば次の数値を使うこと．また，太陽の周りの地球公転軌道，地球の周りの月公転軌道は円とする．

万有引力定数：G=6.7×10^{-11} (Nm^2/kg^2)　地球の質量：M_E=6.0×10^{24} (kg)

月の質量：M_E=7.3×10^{22} (kg)　太陽の質量：M_S=2.0×10^{30} (kg)

地球の半径：R_E=6.4×10^6 (m)　地球の公転半径：r_E=1.5×10^{11} (m)

月の公転半径：r_M=3.8×10^8 (m)

（１）地球との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい．

（２）月との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい．ただし，物体は月にいちばん近い位置にあるものとする．

（３）太陽との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい．ただし，物体は太陽にいちばん近い位置にあるものとする．

２．質量 m の惑星が半径 R の円軌道上を公転している．

（１）中心星の質量を M，万有引力定数を G として，この惑星の公転周期 T を求めよ．

（２）公転の角速度の大きさを M，R，G を用いて表せ．

３．簡単のために，月は地球のまわりに等速円運動しているものとする．地球および月の質量，万有引力定数をそれぞれ M，m，G として，次の問いに答えなさい．

（１）月の公転運動の向心力が月―地球間の万有引力であると考えて，地球表面での重力加速度 g を，月の軌道半径（月の中心と地球中心との距離）r，公転周期（１周するのに要する時間）T，地球半径 R を用いて表しなさい．

（２）（１）において，r=3.84×10^8 (m)，R=6.38×10^6 (m)，T=2.38×10^6 (s)として，g の値を求めなさい．

（３）万有引力定数 G，重力加速度 g をそれぞれ，6.67×10^{-11} (Nm^2/kg^2)，9.81 (m/s^2)として，地球の質量を求めなさい．また，平均密度を求めなさい．

４．木星と地球の平均密度の比を，以下の文字を用いて表したのち，与えられた数値を用いて求めなさい（有効数字２桁で表すこと）．

木星の半径：R_J = 7.1×10^4 (km)

地球の半径：R_E = 6.4×10^3 (km)

木星の衛星カリストの公転半径（木星の周り）：r_C = 1.9×10^6 (km)

および公転周期：T_C = 17 days

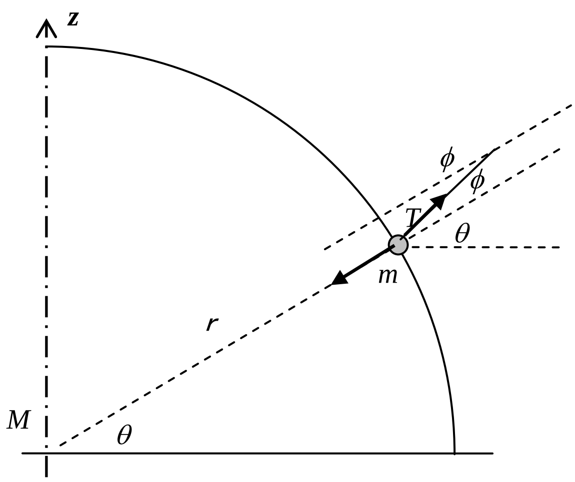
月の公転半径（地球の周り）：r_M = 3.8×10^5 (km)

および　公転周期：T_M = 27 days

５．地球の自転を考慮して，緯度θでの重力加速度を求めよう．右のように地球の緯度θの地点において天井からおもりを吊り下げたところ，半径方向から角度ϕだけ傾いた．地球および物体の質量を M，m，地球の半径および自転の角速度を r，ωとする．ひもの張力をTとすると，回転軸（z 軸）方向の力のつりあいは

$$T\sin(\theta+\phi)=G\frac{Mm}{r^2}\sin\theta \qquad (1)$$

と表される．おもりは回転軸に垂直な平面内で等速円運動しており，半径方向の運動方程式は



$$-mr\cos\theta\omega^2=T\cos(\theta+\phi)-G\frac{Mm}{r^2}\cos\theta \qquad (2)$$

と表される．

（１）式(1)，(2)から，

$$T=G\frac{Mm}{r^2}-mr\omega^2\cos^2\theta \qquad (3)$$

を導きなさい．その際，ϕを微小角とみなして，次の近似を行うこと．

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi\approx\sin\theta+\cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi\approx\cos\theta-\sin\theta\sin\phi$$

（２）（１）の結果から，緯度θでの重力加速度を求めなさい．

（３）自転を考慮したとき，赤道での重力加速度は，北極での値に比べて何%小さくなるかを求めなさい．

（４）自転を考慮したとき，北緯 30 度での重力加速度は，北極での値に比べて何%小さくなるかを求めなさい．

必要ならば G=6.67×10^{-11} (Nm^2/kg^2)，r=6.38×10^6 (m)，M=5.97×10^{24} (kg)，ω=7.27×10^{-5} (rad/s) としなさい．

６．緯度θでの鉛直下向きが半径方向とどれだけずれるかを考えよう．６の図のように，緯度θにおいて天井からおもりを吊り下げたところ，半径方向から角度ϕだけ傾いたとする．必要ならば G=6.67×10^{-11} (Nm^2/kg^2)，r=6.38×10^6 (m)，M=5.97×10^{24} (kg)，ω=7.27×10^{-5} (rad/s) としなさい．なお，ωは自転の角速度である．

（１）次式を示しなさい．

$$\sin\phi=\frac{r^3\omega^2\sin\theta\cos\theta}{GM-r^3\omega^2\cos^2\theta}$$

（２）緯度 45 度での角度ϕを求めなさい．

７．上空 400 km を等速円運動している宇宙ステーションについて，以下の問いに答えなさい．なお，必要ならば，地球の半径および質量は 6.4×10^6 m，6.0×10^{24} kg，万有引力定数は 6.67×10^{-11} (Nm^2/kg^2)としなさい．

（１）円運動の速さを求めなさい．このとき，向心力は地球との間の万有引力のみを考えなさい．

（２）上空 400 km での重力加速度は地表の何倍か．このとき，地球の自転は考慮しなくてもよい．

（３）宇宙ステーション内部の人が地球を足下にみたとき，床から受ける垂直抗力を求めよ．