

課題 6. 万有引力の法則と重力 解答

1. 地球の表面にある物体について、以下の問いに答えなさい。必要ならば次の数値を使うこと。また、太陽の周りの地球公転軌道、地球の周りの月公転軌道は円とする。

万有引力定数: $G=6.7 \times 10^{-11} \text{ (Nm}^2\text{/kg}^2\text{)}$

地球の質量: $M_E=6.0 \times 10^{24} \text{ (kg)}$

月の質量: $M_M=7.3 \times 10^{22} \text{ (kg)}$

太陽の質量: $M_S=2.0 \times 10^{30} \text{ (kg)}$

地球の半径: $R_E=6.4 \times 10^6 \text{ (m)}$

地球の公転半径: $r_E=1.5 \times 10^{11} \text{ (m)}$

月の公転半径: $r_M=3.8 \times 10^8 \text{ (m)}$

- (1) 地球との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい。

$$a_E = \frac{GM_E}{R_E^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

- (2) 月との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい。ただし、物体は月にいちばん近い位置にあるものとする。

$$a_M = \frac{GM_M}{r_M^2} = 3 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

- (3) 太陽との間に働く万有引力によって生じる加速度を求めなさい。ただし、物体は太陽にいちばん近い位置にあるものとする。

$$a_S = \frac{GM_S}{r_E^2} = 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

2. 質量 m の惑星が半径 R の円軌道上を公転している。

- (1) 中心星の質量を M 、万有引力定数を G として、この惑星の公転周期 T を求めよ。

万有引力が向心力になっているので、角速度を ω とすると

$$mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{ゆえ} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

- (2) 公転の角速度の大きさを M , R , G を用いて表せ。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

3. 簡単のために、月は地球のまわりに等速円運動しているものとする。地球および月の質量、万有引力定数をそれぞれ M , m , G として、次の問いに答えなさい。

- (1) 月の公転運動の向心力が月—地球間の万有引力であると考えて、地球表面での重力加速度 g を、月の軌道半径(月の中心と地球中心との距離) r 、公転周期(1周するのに要する時間) T 、地球半径 R を用いて表しなさい。

地球表面での重力加速度は

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad ①$$

月は万有引力によって公転運動しているので、角速度を ω とすると、

$$mr\omega^2 = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = G \frac{Mm}{r^2} \quad ②$$

②より、

$$GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

①に代入して

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2}$$

(2) (1)において、 $r=3.84 \times 10^8$ (m), $R=6.38 \times 10^6$ (m), $T=2.38 \times 10^6$ (s)として、 g の値を求めなさい。

(1)の結果に代入して、 $g=9.69$ (m/s²) を得る。

計算は電卓を使ってかまいません。このとき、10 の何乗という部分は別にして計算するのがコツです。

数値が有効数字3桁で与えられているので、結果もそれに合わせる。このように、月の運動から得られる重力加速度が地上での測定結果とほぼ一致することは、地上の運動、天上の運動が万有引力の法則によって統一的に説明できることを示しています。(Newton の時代でも、地球の半径、月までの距離、月の公転周期、重力加速度ぐらいいは分かっていた。)

(3) 万有引力定数 G 、重力加速度 g をそれぞれ、 6.67×10^{-11} (Nm²/kg²), 9.81 (m/s²)として、地球の質量を求めなさい。また、平均密度を求めなさい。

①より、

$$M = \frac{gR^2}{G} = 5.99 \times 10^{24} \text{ (kg)}$$

平均密度は、

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5.51 \times 10^3 \text{ (kg / m}^3\text{)}$$

なじみのある単位にすると、 5.51 (g/cm³)です。こういう単位の換算にも慣れましょう。

万有引力定数の測定は、Newton の約 100 年後、Cavendish によって行われました。このようにして得られた密度は、地球内部に地表付近の岩石よりもずっと密度の大きな物質が存在することを教えてくれました。

4. 木星と地球の平均密度の比を、以下の文字を用いて表したのち、与えられた数値を用いて求めなさい(有効数字2桁で表すこと)。

$$\text{木星の半径: } R_J = 7.1 \times 10^4 \text{ (km)}$$

地球の半径: $R_E = 6.4 \times 10^3$ (km)

木星の衛星カリストの公転半径(木星の周り): $r_C = 1.9 \times 10^6$ (km)

および公転周期: $T_C = 17$ days

月の公転半径(地球の周り): $r_M = 3.8 \times 10^5$ (km)

および 公転周期: $T_M = 27$ days

カリストの公転は木星の引力によって生じていると考えて,

$$m_C r_C \omega_C^2 = m_C r_C \left(\frac{2\pi}{T_C} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m_C r_C}{T_C^2} = \frac{GM_J m_C}{r_C^2}$$

木星の質量は

$$M_J = \frac{4\pi^2 r_C^3}{GT_C^2}$$

木星の平均密度は

$$\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{1}{4\pi/3 R_J^3} \frac{4\pi^2 r_C^3}{GT_C^2} = \frac{3\pi r_C^3}{GR_J^3 T_C^2} \quad \text{①}$$

同様にして, 地球の平均密度は

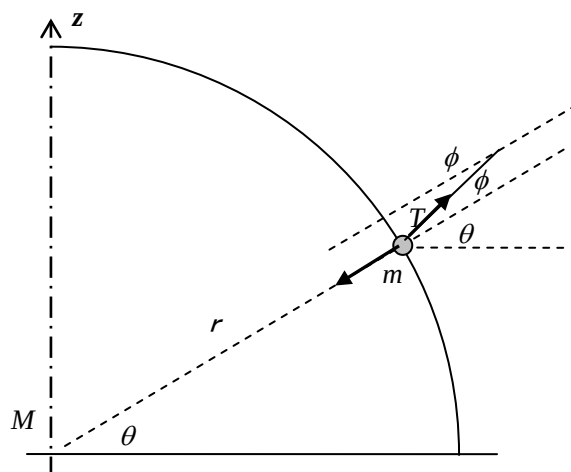
$$\rho_E = \frac{M_E}{V_E} = \frac{1}{4\pi/3 R_E^3} \frac{4\pi^2 r_M^3}{GT_M^2} = \frac{3\pi r_M^3}{GR_E^3 T_M^2} \quad \text{②}$$

①, ②より,

$$\frac{\rho_J}{\rho_E} = \left(\frac{R_E}{R_J} \right)^3 \left(\frac{r_C}{r_M} \right)^3 \left(\frac{T_M}{T_C} \right)^2 = 0.23$$

ニュートンの時代には万有引力定数は求められていなかったため, 惑星の質量は推定できなかったが, 比を求めることは望遠鏡観測で可能だった. 実際にニュートンは木星, 土星が地球に比べて密度が5分の1程度であることを推定している.

5. 地球の自転を考慮して, 緯度 θ での重力加速度を求めよう. 右のように地球の緯度 θ の地点において天井からおもりを吊り下げたところ, 半径方向から角度 ϕ だけ傾いた. 地球および物体の質量を M, m , 地球の半径および自転の角速度を r, ω とする. ひもの張力を T とすると, 回転軸 (z 軸) 方向の力のつりあいは



$$T \sin(\theta + \phi) = G \frac{Mm}{r^2} \sin \theta \quad (1)$$

と表される. おもりは回転軸に垂直な平面内で等速円運動しており, 半径方向の運動方程式は

$$-mr \cos \theta \omega^2 = T \cos(\theta + \phi) - G \frac{Mm}{r^2} \cos \theta \quad (2)$$

と表される.

(1)式(1), (2)から,

$$T = G \frac{Mm}{r^2} - mr \omega^2 \cos^2 \theta$$

を導きなさい. その際, ϕ を微小角とみなして, 次の近似を行うこと.

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \approx \sin \theta + \cos \theta \sin \phi$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \approx \cos \theta - \sin \theta \sin \phi$$

(1)より,

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta + \cos \theta \sin \phi = \frac{GMm}{Tr^2} \sin \theta$$

$$\cos \theta \sin \phi = \left(\frac{GMm}{Tr^2} - 1 \right) \sin \theta$$

$\theta \neq \pi/2$ として

$$\sin \phi = \left(\frac{GMm}{Tr^2} - 1 \right) \tan \theta \quad (3)$$

また(2)より,

$$T \cos(\theta + \phi) = T(\cos \theta - \sin \theta \sin \phi) = G \frac{Mm}{r^2} \cos \theta - mr \cos \theta \omega^2$$

(3)を代入して,

$$T \left[\cos \theta - \left(\frac{GMm}{Tr^2} - 1 \right) \sin \theta \tan \theta \right] = G \frac{Mm}{r^2} \cos \theta - mr \cos \theta \omega^2$$

$$T \cos \theta (1 + \tan^2 \theta) - \frac{GMm}{r^2} \sin \theta \tan \theta = G \frac{Mm}{r^2} \cos \theta - mr \cos \theta \omega^2$$

$$T \cos \theta (1 + \tan^2 \theta) = G \frac{Mm}{r^2} \cos \theta (1 + \tan^2 \theta) - mr \cos \theta \omega^2$$

$$T = G \frac{Mm}{r^2} - \frac{mr \omega^2}{1 + \tan^2 \theta} = G \frac{Mm}{r^2} - mr \omega^2 \cos^2 \theta$$

(2)(1)の結果から, 緯度 θ での重力加速度を求めなさい.

重力加速度を g とすると,

$$T = mg = G \frac{Mm}{r^2} - mr\omega^2 \cos^2 \theta$$

したがって,

$$g = \frac{GM}{r^2} - r\omega^2 \cos^2 \theta$$

(3) 自転を考慮したとき、赤道での重力加速度は、北極での値に比べて何%小さくなるかを求めなさい。

北極での重力加速度は

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

赤道での重力加速度は

$$g = \frac{GM}{r^2} - r\omega^2$$

したがって,

$$\frac{r\omega^2}{\frac{GM}{r^2}} = \frac{r^3\omega^2}{GM} = 3.45 \times 10^{-3} \Rightarrow 0.345\% \text{ 小さくなる}$$

(4) 自転を考慮したとき、北緯 30 度での重力加速度は、北極での値に比べて何%小さくなるかを求めなさい。

必要ならば $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ (Nm}^2/\text{kg}^2)$, $r=6.38 \times 10^6 \text{ (m)}$, $M=5.97 \times 10^{24} \text{ (kg)}$, $\omega=7.27 \times 10^{-5} \text{ (rad/s)}$ としなさい。

北緯 30 度での重力加速度は

$$\frac{GM}{r^2} - r\omega^2 \cos^2 \theta = \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{4}r\omega^2$$

したがって,

$$\frac{\frac{3}{4}r\omega^2}{\frac{GM}{r^2}} = \frac{3}{4} \frac{r^3\omega^2}{GM} = 2.59 \times 10^{-3} \Rightarrow 0.259\% \text{ 小さくなる}$$

6. 緯度 θ での鉛直下向きが半径方向とどれだけずれるかを考えよう。6の図のように、緯度 θ において天井からおもりを吊り下げたところ、半径方向から角度 ϕ だけ傾いたとする。必要ならば $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ (Nm}^2/\text{kg}^2)$, $r=6.38 \times 10^6 \text{ (m)}$, $M=5.97 \times 10^{24} \text{ (kg)}$, $\omega=7.27 \times 10^{-5} \text{ (rad/s)}$ としなさい。なお、 ω は自転の角速度である。

(1) 次式を示しなさい。

$$\sin \phi = \frac{r^3\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{GM - r^3\omega^2 \cos^2 \theta}$$

5の式(3)

$$\sin \phi = \left(\frac{GMm}{Tr^2} - 1 \right) \tan \theta$$

に

$$T = G \frac{Mm}{r^2} - mr\omega^2 \cos^2 \theta$$

を代入する.

$$Tr^2 = GMm - mr^3\omega^2 \cos^2 \theta$$

ゆえ,

$$\sin \phi = \left(\frac{GMm}{Tr^2} - 1 \right) \tan \theta = \left(\frac{GMm}{GMm - mr^3\omega^2 \cos^2 \theta} - 1 \right) \tan \theta = \frac{r^3\omega^2 \sin \theta \cos \theta}{GM - r^3\omega^2 \cos^2 \theta}$$

(2) 緯度 45 度での角度 ϕ を求めなさい.

$\theta = \pi/4$ のとき,

$$\sin \phi = \frac{r^3\omega^2}{2GM - r^3\omega^2}$$

数値を代入すると,

$$\sin \phi = \frac{r^3\omega^2}{2GM - r^3\omega^2} = 0.0175$$

したがって,

$$\phi = \sin^{-1}(0.0175) = 1.00^\circ$$

7. 上空 400 km を等速円運動している宇宙ステーションについて, 以下の問いに答えなさい. なお, 必要ならば, 地球の半径および質量は 6.4×10^6 m, 6.0×10^{24} kg, 万有引力定数は 6.67×10^{-11} (Nm²/kg²) としなさい.

(1) 円運動の速さを求めなさい. このとき, 向心力は地球との間の万有引力のみを考えなさい.

地球および宇宙ステーションの質量を M , m' とする. また, 地球半径および高さを R , H とする. 円運動の速さを v とすると, 半径方向の運動方程式は万有引力定数を G として

$$m' \frac{v^2}{R+H} = G \frac{Mm'}{(R+H)^2} \quad \text{①}$$

したがって,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+H}} = 7.66(\text{km/s})$$

(2) 上空 400 km での重力加速度は地表の何倍か. このとき, 地球の自転は考慮しなくてもよい.

上空 400 km での重力加速度を g' とすると,

$$g' = \frac{GM}{(R+H)^2} = \frac{GM}{R^2} \left(\frac{R}{R+H} \right)^2 = g \left(\frac{1}{1+H/R} \right)^2 = 0.88g$$

したがって, 地表から離れるから無重力状態になるわけではない.

(3) 宇宙ステーション内部の人が地球を足下にみたとき, 床から受ける垂直抗力を求めよ.

宇宙空間に固定した座標系からみたとき、人は地球の周りを宇宙ステーションと同じ速さで円運動している。
人の質量を m 、床から受ける垂直抗力を N とすると

$$m \frac{v^2}{R+H} = G \frac{Mm}{(R+H)^2} - N \quad \text{②}$$

①, ②より, $N=0$. それゆえ、人は重力が働いていないような感覚をもつ(床からの反発がない).