

課題 7. 角運動量と力のモーメント(1)

1. $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルである. また, k はある定数とする. 次のベクトル積を求めなさい.

(1) $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$

(2) $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z$

(3) $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$

(4) $\mathbf{e}_y \times k\mathbf{e}_x$

(5) $\mathbf{e}_y \times k\mathbf{e}_y$

2. 1の結果に基づいて

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \text{ のベクトル積 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ が, } \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \text{ であることを示しなさい.}$$

3. ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求めなさい.

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

4. ベクトル積について, 次の性質があることを示しなさい. なお, $\cdot$ は内積(スカラー積)を表す.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

5. 図のように, xy 平面上の点 $P(2a, a, 0)$ を質量 m の質点が y 方向に速さ v で運動しているとき, 次の点のまわりの角運動量(ベクトル)を求めよ.

(1) 点 $O(0, 0, 0)$

(2) 点 $A(0, Y, 0)$

(3) 点 $B(2a, 0, 0)$

(4) 点 $C(0, 0, a)$

