課題　7. 角運動量と力のモーメント（1）　解答および解説

1. $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向いた単位ベクトルである．また，k はある定数とする．次のベクトル積を求めなさい．

ベクトル積の図形的定義に従って考えればなんでもない（1番目，2番目のベクトルの始点をそろえ，終点をつなぐように右ネジを回したら，どの方向に進むかを考えればよい．）．xyz 座標軸は必ず右手系（親指，人差し指，中指を x,y,z 軸とする）で考えること！

（1）　$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$

（2）　$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x$

（3）　$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = e_y$

（4）　$\boldsymbol{e}_y \times k\boldsymbol{e}_x = -k\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = -k\boldsymbol{e}_z$

（5）　$\boldsymbol{e}_y \times k\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}$

2. 1の結果に基づいて

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$　のベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が，$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ であることを示しなさい．

ベクトルを基本ベクトルの和の形で表せばよい．

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{e}_x + b_y\boldsymbol{e}_y + b_z\boldsymbol{e}_z$$

であり，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z) \times (b_x\boldsymbol{e}_x + b_y\boldsymbol{e}_y + b_z\boldsymbol{e}_z) \\
&= a_x b_x \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x + a_x b_y \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y + a_x b_z \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z \\
&+ a_y b_x \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x + a_y b_y \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y + a_y b_z \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z \\
&+ a_z b_x \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x + a_z b_y \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y + a_z b_z \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

3. ベクトル積　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$　を求めなさい．上の式に当てはめるだけ．

（1）$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot(-7) - 3\cdot 6 \\ 3\cdot 3 - 2\cdot(-7) \\ 2\cdot 6 - (-4)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix}$

（2）$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}9\\-5\\0\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0-0\cdot(-5)\\0\cdot 9-(-4)\cdot 0\\-4\cdot(-5)-3\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix}$$

（3）$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\-8\\-6\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-8\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-6)-3\cdot(-8)\\3\cdot 0-0\cdot(-6)\\0\cdot(-8)-4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

平行（定数倍）な2つのベクトルだから成分計算するまでもなかったかもしれない．

4．ベクトル積について，次の性質があることを示しなさい．なお，・は内積（スカラー積）を表す．

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

成分で考えればよいだけのこと．

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_yc_z-b_zc_y\\b_zc_x-b_xc_z\\b_xc_y-b_yc_x\end{pmatrix}$$

ゆえ

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_yc_z-b_zc_y\\b_zc_x-b_xc_z\\b_xc_y-b_yc_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\\a_z(b_yc_z-b_zc_y)-a_x(b_xc_y-b_yc_x)\\a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y(b_yc_z-b_zc_y)\end{pmatrix}$$

また，

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_x(a_yc_y+a_zc_z)-c_x(a_yb_y+a_zb_z)\\b_y(a_xc_x+a_zc_z)-c_y(a_xb_x+a_zb_z)\\b_z(a_xc_x+a_yc_y)-c_z(a_xb_x+a_yb_y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\\a_z(b_yc_z-b_zc_y)-a_x(b_xc_y-b_yc_x)\\a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y(b_yc_z-b_zc_y)\end{pmatrix}$$

したがって，

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

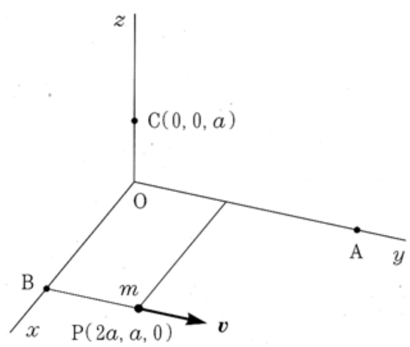
5. 図のように，xy 平面上の点 P $(2a, a, 0)$ を質量 m の質点が y 方向に速さ v で運動しているとき，次の点のまわりの角運動量（ベクトル）を求めよ.

（1）点 O $(0, 0, 0)$

（2）点 A $(0, Y, 0)$

（3）点 B $(2a, 0, 0)$

（4）点 C $(0, 0, a)$



原点を基準にした質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．ある点 $\boldsymbol{X}$ を基準にした位置ベクトル $\boldsymbol{x}'$は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$$

であり，その点を基準にした速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{x}}' = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{X}} \qquad (\boldsymbol{X} \text{ が固定点ならば } \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0})$$

その点のまわりの角運動量ベクトルは

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{x}' \times m\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{x}' \times m\dot{\boldsymbol{x}}'$$

である.

（1）この場合は $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{x}' \times m\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2amv \end{pmatrix}$$

（2）$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a-Y \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{x}' \times m\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a-Y \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2amv \end{pmatrix}$$

（3）$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{x}' \times m\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（4）$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ -a \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{x}' \times m\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ -a \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} amv \\ 0 \\ 2amv \end{pmatrix}$$