

課題 7. 角運動量と力のモーメント(2) 解答および解説

1. 水平面(これを xy 平面とする)上で原点を中心とする円運動

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t \\ y &= a \sin \omega t\end{aligned}, \quad a > 0, \quad \omega \text{ は定数.}$$

をしている質量 m の質点がある.

(1) 時刻 t に質点が受けている力 F を成分表示しなさい.

(2) 中心のまわりの力のモーメント N を求めなさい.

(3) 時刻 t における中心のまわりの角運動量 L を求めなさい.

(1) 質点に働いているのは, 向心力 f (いまの場合, その実体はわからない), 重力 G , 面からの垂直抗力 N である. それらを成分表示すると

$$\mathbf{f} = -ma\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{G} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -ma\omega^2 \cos \omega t \\ -ma\omega^2 \sin \omega t \\ N - mg \end{pmatrix}$$

鉛直方向には運動しないので, $N=mg$ であり,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -ma\omega^2 \cos \omega t \\ -ma\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -ma\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 質点の位置ベクトルは,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{であるから, } \mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{位置ベクトルと力が平行})$$

(3) 質点の速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -ma\omega \sin \omega t \\ ma\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ma^2\omega \end{pmatrix}$$

2. 質量 m の質点が, zx 平面内を等速度運動をして,

$$x = vt, y = 0, z = b$$

のような軌跡を描いている. 原点のまわりの角運動量を求めなさい.

原点を基準にした位置および速度は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mbv \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. 点 $A(a, 0, 0)$ にある質点に, $(b, b, 0)$ の力が働いている. 次の点のまわりの力のモーメント(ベクトル)を求めなさい. (1) 原点, (2) 点 $B(0, a, 0)$, (3) 点 $C(a, c, 0)$

(1) 原点を基準にした点 A の位置ベクトルは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえ, } \mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$$

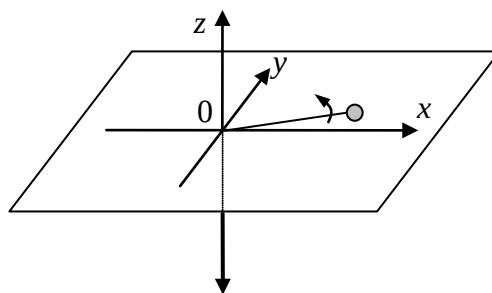
(2) 点 B を基準にした点 A の位置ベクトルは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえ, } \mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2ab \end{pmatrix}$$

(3) 点 C を基準にした点 A の位置ベクトルは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえ, } \mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bc \end{pmatrix}$$

4. 水平に置かれた滑らかな板の上に小孔がある。質量 m の粒子に軽い糸をつけ、糸の他端を小孔を通して下に引っ張り、粒子を半径 R_0 、角速度 ω_0 で等速円運動させる。小孔を原点とし、水平面内に x, y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。下の問いに答えなさい。



- (1) 時刻 $t=0$ に粒子は $x=R_0, y=0, z=0$ にある。粒子の位置ベクトル（基準は原点）および速度ベクトルを時間 t の関数として表しなさい。
- (2) 原点のまわりの粒子の角運動量ベクトルを求めなさい。
- (3) 粒子にはたらく外力を水平面内、鉛直方向に分けて列挙しなさい。
- (4) 粒子にはたらく力のモーメント（原点のまわり）を求めなさい。（この時点の回転半径は R_0 ）
- (5) 糸を静かに引いて円運動の半径を $R(<R_0)$ に変えた。半径が R のときの粒子の角速度 ω を求めなさい。

$$(1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = R_0 \begin{pmatrix} -\omega_0 \sin \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} = R_0 \omega_0 \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \times mR_0 \omega_0 \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} = mR_0^2 \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 水平面内：糸の張力（中心向き），鉛直方向：垂直抗力（上向き），重力（下向き）

(4) 糸の張力，垂直抗力，重力をそれぞれ， $\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ とすると，粒子にはたらく力のモーメント $\mathbf{N}$ は，

$$\mathbf{N} = \mathbf{x} \times (\mathbf{T} + \mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathbf{x} \times \mathbf{T} + \mathbf{x} \times (\mathbf{F} + \mathbf{G})$$

ここで，

$$\mathbf{x} \parallel \mathbf{T}, \quad \mathbf{F} + \mathbf{G} = 0$$

ゆえ，

$$\mathbf{N} = 0$$

(5) 糸を引く間に粒子にはたらく力は垂直抗力，重力，糸の張力である。このうち，垂直抗力と重力の和はゼロであり，これらの力のモーメントもゼロである。糸の張力は半径方向を向いているので，力のモーメントは常にゼロである。したがって，粒子の角運動量は変化しない。

半径が R になったときの角運動量は，

$$\mathbf{L}' = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha) \\ \sin(\omega t + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times mR\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \alpha) \\ \cos(\omega t + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = mR^2 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{であるから, } \mathbf{L} = \mathbf{L}' \text{ より, } mR^2 \omega = mR_0^2 \omega_0, \quad \omega = \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \omega_0$$

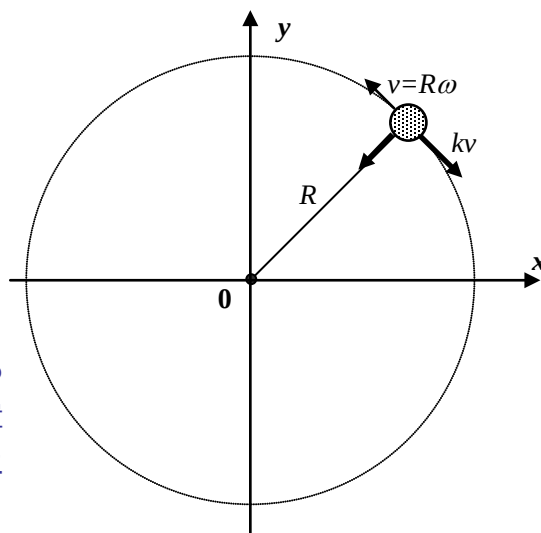
5. 質量と空気抵抗が無視できる長さ R の細い棒の一端に質量 m のおもりを取り付け、他端を水平面上に固定して、おもりに水平面上で半径 R の円運動をさせる。水平面との摩擦はないものとする。このおもりは速さに比例する大きさの空気抵抗(比例定数を k とする)を受け、それによって円運動の角速度 ω が時間とともに減少していく。 $t = 0$ のとき $\omega = \omega_0$ として、角速度 ω を時間の関数として表しなさい。

水平面上で図のように座標軸をきめる(z 軸は鉛直上向き)。

おもりの原点のまわりの角運動量を L とすると、

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Rmv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mR^2\omega \end{pmatrix}$$

(角運動量が位置ベクトル、運動量ベクトルのベクトル積であること、ベクトル積の図形的定義から考える。もちろん、位置ベクトルを成分で表して求めてもよいのだが、この場合は、この方がラク。図形的定義で考えるか？成分から計算するか？状況に応じて使い分けられるように)



おもりに働く力は、水平面内は、棒から働く力 T (これも張力のようなもの)、空気抵抗 f 。鉛直方向は重力と垂直抗力で、この2つは釣り合っている。したがって、原点のまわりの力のモーメントは、

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Rkv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -kR^2\omega \end{pmatrix}$$

(ここでも力のモーメントが位置ベクトルと力のベクトル積であること、ベクトル積の図形的定義から考えている) したがって、おもりの回転の運動方程式は

$$\dot{L} = N$$

であり、

$$mR^2\dot{\omega} = -kR^2\omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{k}{m}\omega, \quad \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k}{m}$$

$$\ln|\omega| = -\frac{k}{m}t + c, \quad \omega = \pm e^{-\frac{k}{m}t+c} = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

初期条件より、 $C = \omega_0$ であり、

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$