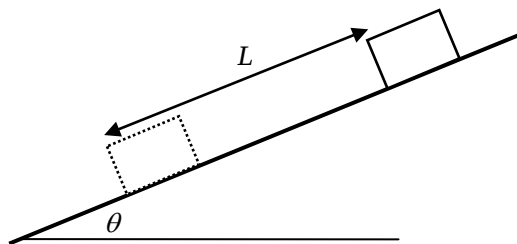


基礎地球力学 仕事とエネルギー(1) 課題 解答例

1. 傾き θ の斜面上を質量 m の物体が初速度 V で滑り落ちる。物体と斜面の間の動摩擦係数は μ である。必要ならば、重力加速度を g として以下の問いに答えなさい。
答えだけでなく、それを導く過程も記すこと。



- (1) 物体が斜面に沿って距離 L だけ滑り落ちる間に重力のなす仕事を求めなさい。
重力の大きさは mg で、向きは鉛直下向き。物体の変位は斜面方向下向きに距離 L 。
重力のベクトルと変位のベクトルのなす角は

$$\frac{\pi}{2} - \theta$$

したがって、重力のなす仕事は

$$W = mgL \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mgL \sin \theta$$

- (2) 物体が斜面に沿って距離 L だけ滑り落ちる間に、斜面から働く垂直抗力のなす仕事を求めなさい。
垂直抗力は変位のベクトルと直交するので、垂直抗力のなす仕事は

$$W = 0$$

- (3) 物体が斜面に沿って距離 L だけ滑り落ちる間に動摩擦力のなす仕事を求めなさい。
斜面から物体に働く垂直抗力を N とすると、動摩擦力の大きさは

$$\mu N$$

これは斜面方向上向きに働く(運動を妨げる向き)。

ところで、斜面に垂直な方向では力はずりあっているので、

$$N = mg \cos \theta$$

変位のベクトルとのなす角は、 π 。したがって、動摩擦力のなす仕事は

$$W = \mu NL \cos \pi = -\mu mgL \cos \theta$$

2. 地球(質量: M , 半径: R)を速さ V で飛び出した物体(質量: m)が、地球中心からの距離 r でもつ速さを v とする。万有引力定数を G として、無限遠で v がゼロでない実数であるための V の条件を求めよう。

- (1) 物体の運動エネルギーの変化量(r での値— R での値)を求めよ。

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

- (2) 物体に働く外力は地球からの万有引力のみである。万有引力がなした仕事を求めよ。

$$W = -\int_R^r G \frac{Mm}{x^2} dx = \left[\frac{GMm}{x} \right]_R^r = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

- (3) 外力のなした仕事は運動エネルギーの変化量に等しい。これに基づいて V の条件を求めよ。

(1), (2)より,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV^2 = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

無限遠で v がゼロでない実数であるためには, $v^2 > 0$ でなければならない. したがって,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 + GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} > 0$$

$$V^2 > \frac{2GM}{R}$$

$$V > \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$