

課題 11. 質点系の運動(1) 解答および解説

1. 一直線上を異なる速さで運動している質量 m の2つの物体が、衝突してから一体となって運動を続けたとする。以下の場合、衝突後の速度(速さと向き)はどうなるか。また、衝突によって2つの物体の運動エネルギーの和はどのように変化するか。重力は考えないものとする。

(1) 速さ v_1, v_2 で同じ向きに運動している。

(2) 速さ v_1, v_2 で反対向きに運動し、正面衝突する(向きについては場合分けが必要)。

衝突前の速度を v_1, v_2 、衝突後の速度を V とすると、外力が作用していないので運動量の和は変化しない。

$$mv_1 + mv_2 = 2mV$$

$$\text{したがって、 } V = \frac{mv_1 + mv_2}{2m} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \text{①}$$

(1) 2つの物体の衝突前の運動の向きを正の向きにとる。1次元で考えればよいので、①より

$$V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \quad \text{したがって、速さは } \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \text{であり、向きは衝突前と同じ(正の向き).}$$

運動エネルギーの和は、

$$\text{衝突前: } K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\text{衝突後: } K_2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \left[\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \right]^2 = \frac{1}{4}m(v_1 + v_2)^2$$

したがって、変化は

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{4}m(v_1 + v_2)^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2 \leq 0$$

運動エネルギーは減少するか、または変化しない($v_1=v_2$ のとき)。

(2) 衝突前の物体1の運動の向きを正の向きにとる。①より、

$$V = \frac{1}{2}(v_1 - v_2).$$

したがって、速さは $\frac{1}{2}|v_1 - v_2|$. 向きは $v_1 > v_2$ のときは正の向きであり、 $v_1 < v_2$ のときは負の向き。

運動エネルギーの和は、

$$\text{衝突前: } K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\text{衝突後: } K_2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \left[\frac{1}{2}(v_1 - v_2) \right]^2 = \frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2$$

したがって、変化は

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\frac{1}{4}m(v_1 + v_2)^2 < 0$$

運動エネルギーは減少する。

2. 直線状の線路を速さ V で走っているトロツコに乗っている人が、質量 m のボールを後方に向かって地面と平行な向きに投げた。ボールは人から見て速さ v で遠ざかっていった。トロツコと人を合わせた質量を M として、投げた後のトロツコの速さ V' と、ボールの地表に対する速さ v' を求めよ。ただし、重力は考えないものとする。

まず図を描いてみる



1次元の運動として考えてよい。トロツコの走る向きを正の向きにとる。空気抵抗や線路と車輪の摩擦が無視できるので(とくに指定がないので)、水平方向の運動量の和は変化しない。ボールを投げる前は、トロツコ、人、ボールがすべて同じ速さ V で地表に対して運動している。ボールを投げた後は、トロツコと人は速さ V' 、ボールは v' で地表に対して運動している。したがって、

$$(M + m)V = MV' + mv' \quad \text{①}$$

また、ボールは人に対して速さ v で遠ざかっているので

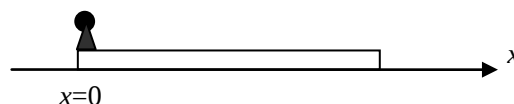
$$v' - V' = -v \quad \text{②}$$

①, ②より、

$$V' = V + \frac{m}{M + m}v$$

$$v' = V - \frac{M}{M + m}v$$

3. 質量 M 、長さ l の板が摩擦のない氷面上にある。図のように、水平方向に x 軸をとり、はじめに板の左端があった位置を原点にとる。はじめ板の左端に静止していた質量 m の人が、板の上を右端まで歩いた。板の質量は中心に集中しているものと考えて、以下の問いに答えよ。



- (1) 人が板の左端に立っているとき、人と板からなる系の重心の位置 (x 座標) を求めよ。

$$X_G = \frac{m \cdot 0 + M \cdot \frac{l}{2}}{m + M} = \frac{Ml}{2(m + M)}$$

- (2) 人が板の右端に達したとき、板の中心の位置は X' になったとする。このときの重心の位置を M , m , l , X' を用いて表せ。

$$X'_G = \frac{m \cdot \left(X' + \frac{l}{2}\right) + MX'}{m + M} = X' + \frac{ml}{2(m + M)}$$

(3) X' を M, m, l を用いて表せ. 導き方についても適切に記すこと.

人および板の中心の位置を x, X とすると, 重心の位置は

$$X_G = \frac{mx + MX}{m + M}$$

重心の運動方程式は以下のように表される.

$$(m + M)\ddot{X}_G = m\ddot{x} + M\ddot{X} = f - f = 0$$

ここで, f は板が人に及ぼす力である. したがって, $\dot{X}_G = \text{const.}$

はじめ, 人も板も静止していたので, $\dot{X}_G = 0$. したがって, $X_G = \text{const.}$

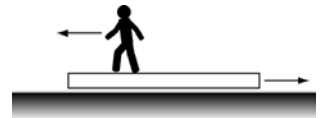
以上から,

$$\frac{Ml}{2(m + M)} = X' + \frac{ml}{2(m + M)}$$

であり,

$$X' = \frac{(M - m)l}{2(m + M)} < \frac{l}{2} \quad \text{したがって, 板は左側に移動する}$$

4. なめらかな水平面上に置かれた質量 M の板の上で, 質量 m の人が板に対して左向きに加速度 a で歩く. 板は水平面に対してどれだけの加速度をもつか. また, 人と板が水平方向に互いに及ぼし合う力はどれだけのか.



1次元の問題として考えてよい. 図の右向きを正の向きにとる. 板の水平面に対する加速度を α , 人と板が水平方向に互いに及ぼしあう力を f とする. 水平面(静止している)を基準にして運動方程式を考える. 人の水平面に対する加速度は $\alpha - a$ であり, 人は板から左向きに力 f を受ける. 人の運動方程式は

$$m(\alpha - a) = -f \quad \text{①}$$

板は人から右向きに力 f を受けるので, 運動方程式は

$$M\alpha = f \quad \text{②}$$

①, ②より,

$$\alpha = \frac{m}{M + m} a$$

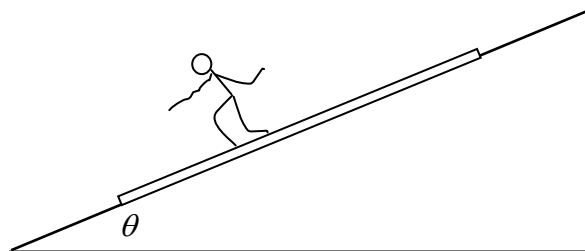
$$f = M\alpha = \frac{Mm}{M + m} a$$

5. 水平面と角 θ をなすなめらかな斜面上に質量 M の板があり, その上を質量 m の人が走り下る. 板が斜面を滑り落ちない(下向きの加速度をもたない)ようにするには, 人はどのような加速度(一定とする)で走らなければならないか.

ヒント: 人と板の斜面方向の運動方程式を考えてみよ.

斜面方向下向きに x 軸をとり, 人および板の質量中心を x, X で表す.

人が板に及ぼす斜面方向上向きの力(蹴り上げる力)の大きさを f とする.



人の運動方程式

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta + f \quad (1) \quad \text{人は板から斜面方向下向きの力を受ける}$$

板の運動方程式

$$M\ddot{X} = Mg \sin \theta - f \quad (2)$$

板が斜面を滑り落ちないためには,

$$\ddot{X} \leq 0$$

でなければならない. (斜面方向下向きの加速度が正だと滑り落ちてしまう)

したがって, (2)から, 力について

$$f \geq Mg \sin \theta$$

という条件を得る. (1)より,

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta + f \geq (m + M)g \sin \theta$$

したがって, 人の加速度が次の条件を満たせば, 板は滑り落ちない.

$$\ddot{x} \geq \frac{m + M}{m} g \sin \theta$$