

課題 12. 質点系の運動(2)

1. 質点 A, B, C からなる質点系の重心の位置座標を求めよ. A, B, C の質量はそれぞれ, $m_A = a$, $m_B = 2a$, $m_C = 3a$, 位置ベクトルは, $\mathbf{r}_A = (3b, 3b, 3b)$, $\mathbf{r}_B = (0, 0, 2b)$, $\mathbf{r}_C = (b, 0, b)$ である.
2. 質量 $2m$, m をもつ2つの質点を, 長さ $3a$ の軽い棒でつないだバトンがある. このバトンが, 角速度 ω で水平面内で回転し, その重心は鉛直上方 (z 軸方向) に一定の速さ W で上昇している. 質量 $2m$ の質点の座標 (x, y, z) を時刻 t の関数として表しなさい. なお, 時刻 $t=0$ において, 質量 $2m$ の質点は $(a, 0, 0)$ に, 質量 m の質点は $(-2a, 0, 0)$ にあるとする.

3. 重心の角運動量 L_G および相対運動の角運動量の和 L' を, それぞれ

$$L_G = \mathbf{X} \times M\mathbf{V}, \quad L' = \sum (\mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

と定義する. このとき,

$$\dot{L}_G = \mathbf{X} \times \sum \mathbf{F}_i, \quad \dot{L}' = \sum (\mathbf{x}'_i \times \mathbf{F}_i)$$

であることを示せ. 各シンボルの意味は授業と同様である.

4. なめらかな水平面上で, 質量 m の2つの質点が軽いバネ (自然長: l_0 , バネ定数: k) によってつながれ, x 軸に沿って振動しながら x 軸の正の向きに運動している. 質点系には水平方向の外力が働いていないので, 重心は一定の速さ V で動いており, その位置は $X=Vt$ と表される. バネの長さ l は, 振幅 C , 角速度 ω で振動しており,

$$l(t) = l_0 + C \sin \omega t$$

と表される. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2つの質点の位置 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ を時間の関数として表しなさい.
 - (2) 重心に対する質点2 (x_2) の運動を考えて, 振動の角速度を求めなさい.
5. 等しい質量 m をもち, 一定の距離 r だけ離れた連星が, xy 平面内を角速度 ω で回転しながら (z 軸を紙面上向きにとり, z 軸の正側から見て反時計周りに回転しているとする), 直線 $y = a$ に沿って x 方向に一定の速さ V で動いている. 重心運動と相対運動に分けることにより, 連星の全運動エネルギーおよび原点の周りの全角運動量を求めよ.

