課題　12. 質点系の運動（2）　解答および解説

1. 質点 A, B, C からなる質点系の重心の位置座標を求めよ. A, B, C の質量はそれぞれ, $m_A = a$, $m_B = 2a$, $m_C = 3a$, 位置ベクトルは, $\boldsymbol{r}_A = (3b, 3b, 3b)$, $\boldsymbol{r}_B = (0, 0, 2b)$, $\boldsymbol{r}_C = (b, 0, b)$ である.

質点系の重心は

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{a \cdot 3b + 2a \cdot 0 + 3a \cdot b}{6a} = \frac{6ab}{6a} = b$$

$$y_G = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{a \cdot 3b + 2a \cdot 0 + 3a \cdot 0}{6a} = \frac{3ab}{6a} = \frac{1}{2}b$$

$$z_G = \frac{m_A z_A + m_B z_B + m_C z_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{a \cdot 3b + 2a \cdot 2b + 3a \cdot b}{6a} = \frac{10ab}{6a} = \frac{5}{3}b$$

2. 質量 $2m$, m をもつ2つの質点を, 長さ $3a$ の軽い棒でつないだバトンがある. このバトンが, 角速度ωで水平面内で回転し, その重心は鉛直上方（z 軸方向）に一定の速さ W で上昇している. 質量 $2m$ の質点の座標(x, y, z)を時刻 t の関数として表しなさい. なお, 時刻 t=0 において, 質量 $2m$ の質点は(a, 0, 0)に, 質量 m の質点は(-2a, 0, 0)にあるとする.

バトンの重心は, 質量 $2m$ の質点から

$$\frac{2m \cdot 0 + m \cdot 3a}{2m + m} = \frac{3am}{3m} = a$$

だけのところにある. したがって, 時刻 t=0 において重心は原点にあり, その位置は

$X=Y=0,\ Z=Wt$

で表される. 質量 2m の質点は, 重心を中心として半径 a, 角速度ωで水平面内で回転するので,

$$x = a\cos\omega t$$
$$y = a\sin\omega t$$
$$z = Wt$$

※テキストの解答は間違っている.

3. 重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G$ および相対運動の角運動量の和 $\boldsymbol{L}'$を, それぞれ

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{X} \times M\boldsymbol{V}\ , \quad \boldsymbol{L}' = \sum \left(\boldsymbol{x}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \right)$$

と定義する. このとき,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_G = \boldsymbol{X} \times \sum \boldsymbol{F}_i\ , \quad \dot{\boldsymbol{L}}' = \sum \left(\boldsymbol{x}'_i \times \boldsymbol{F}_i \right)$$

であることを示せ. 各シンボルの意味は授業と同様である.

重心の角運動量を微分して,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_G = \dot{\boldsymbol{X}} \times M\boldsymbol{V} + \boldsymbol{X} \times M\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{X} \times M\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{X} \times \sum \boldsymbol{F}_i$$

もちろん, ここでは

$$M\dot{\boldsymbol{V}} = \sum m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i = \sum \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right) = \sum \boldsymbol{F}_i$$

を使っています.

後半(相対運動の角運動量)については, 2つの方法を示しておきます.

(1)質点系の原点のまわりの全角運動量を $\boldsymbol{L}$ とすると,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}'$$

であるから,

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{L}}_G + \dot{\boldsymbol{L}}'$$

$\boldsymbol{L}$ の時間変化は外力のモーメントの和に等しい.

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}' = \dot{\boldsymbol{L}} - \dot{\boldsymbol{L}}_G &= \sum (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i) - \boldsymbol{X} \times \sum \boldsymbol{F}_i \\
&= \sum (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{F}_i) - \sum (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{F}_i) \\
&= \sum ((\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}) \times \boldsymbol{F}_i) \\
&= \sum (\boldsymbol{x}'_i \times \boldsymbol{F}_i)
\end{aligned}$$

(2)$\boldsymbol{L}$'を時間微分すると,

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \sum (\dot{\boldsymbol{x}}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{x}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{v}}'_i) = \sum (\boldsymbol{v}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{x}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{v}}'_i) = \sum (\boldsymbol{x}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{v}}'_i)$$

ここで,

$$m_i \dot{\boldsymbol{v}}'_i = m_i (\dot{v}_i - \dot{\boldsymbol{V}}) = \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{V}}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}}' &= \sum \boldsymbol{x}'_i \times \left[\left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{V}} \right] \\
&= \sum \boldsymbol{x}'_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum \sum_{j \neq i} \boldsymbol{x}'_i \times \boldsymbol{F}_{ij} - \sum \boldsymbol{x}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{V}}
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}&\sum\sum_{j\neq i}\boldsymbol{x}_i'\times\boldsymbol{F}_{ij}\\&=\boldsymbol{x}_1'\times\left(\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{13}+\cdots+\boldsymbol{F}_{1n}\right)+\boldsymbol{x}_2'\times\left(\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{23}+\cdots+\boldsymbol{F}_{2n}\right)+\cdots\\&=\left(\boldsymbol{x}_1'-\boldsymbol{x}_2'\right)\times\boldsymbol{F}_{12}+\left(\boldsymbol{x}_1'-\boldsymbol{x}_3'\right)\times\boldsymbol{F}_{13}+\cdots\\&=\sum\left(\boldsymbol{x}_i'-\boldsymbol{x}_j'\right)\times\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

また，

$$\sum\boldsymbol{x}_i'\times m_i\dot{\boldsymbol{V}}=\sum m_i\boldsymbol{x}_i'\times\dot{\boldsymbol{V}}=\left(\sum m_i\boldsymbol{x}_i'\right)\times\dot{\boldsymbol{V}}=\left[\sum m_i\left(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}\right)\right]\times\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{0}\times\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{0}$$

したがって，

$$\dot{\boldsymbol{L}}'=\sum\left(\boldsymbol{x}_i'\times\boldsymbol{F}_i\right)$$

これは“重心の周りの角運動量変化“が，“重心の周りの外力のモーメントの和“によって生じることを意味します．このように，”式の意味“を考えるようにしましょう．

4．なめらかな水平面上で，質量 m の2つの質点が軽いバネ（自然長：l_0，バネ定数：k）によってつながれ，x 軸に沿って振動しながらx軸の正の向きに運動している．質点系には水平方向の外力が働いていないので，重心は一定の速さ V で動いており，その位置は $X=Vt$ と表される．バネの長さ l は，振幅 C，角速度ωで振動しており，

$$l(t)=l_0+C\sin\omega t$$

と表される．以下の問いに答えなさい．

（1）2つの質点の位置 x_1，$x_2(x_1<x_2)$を時間の関数として表しなさい．

2つの質点の x 座標の差がバネの長さなので，

$$x_2-x_1=l_0+C\sin\omega t \qquad ①$$

また，重心の位置は

$$X=\frac{mx_1+mx_2}{2m}=Vt \qquad ②$$

と表される．①，②より，

$$x_1=Vt-\frac{1}{2}\left(l_0+C\sin\omega t\right)$$

$$x_2=Vt+\frac{1}{2}\left(l_0+C\sin\omega t\right)$$

（2）重心に対する質点2（x_2）の運動を考えて，振動の角速度を求めなさい．

質点2の重心に対する相対座標は，

$$x_2'=x_2-X$$

運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_2' = -k(l-l_0) = -k[(x_2-x_1)-l_0] = -k[(x_2-X)-(x_1-X)-l_0]$$

質点1と質点2は重心に対して対称に動くので

$$x_1 - X = -(x_2 - X)$$

したがって,

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_2' = -k[2(x_2-X)-l_0] = -k(2x_2'-l_0) = -2k\left(x_2' - \frac{l_0}{2}\right)$$

であり,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(x_2' - \frac{l_0}{2}\right) = -2k\left(x_2' - \frac{l_0}{2}\right)$$

あらためて,

$$y = x_2' - \frac{l_0}{2}$$

と考えると,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2k}{m}y = -\alpha^2 y \quad \text{ただし, } \alpha = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

これは一般に

$$y = A\sin(\alpha t + \beta)$$

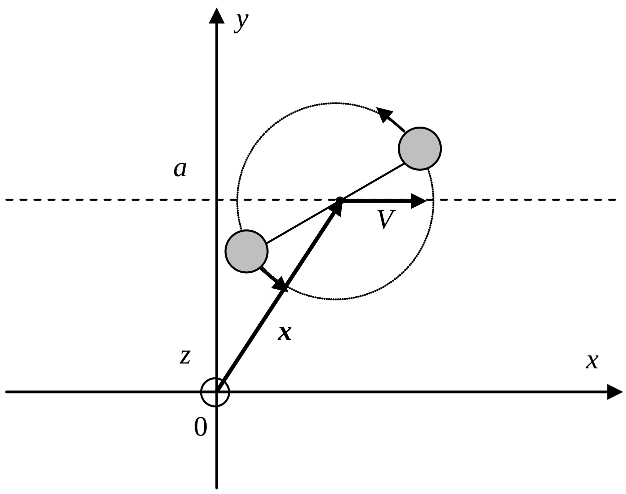
の形の解をもつ. したがって,

$$x_2' = \frac{l_0}{2} + A\sin(\alpha t + \beta)$$

求める角速度は

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

5. 等しい質量 m をもち, 一定の距離 r だけ離れた連星が, xy 平面内を角速度 ω で回転しながら (z 軸を紙面上向きにとり, z 軸の正側から見て反時計周りに回転しているとする), 直線 $y = a$ に沿って x 方向に一定の速さ V で動いている. 重心運動と相対運動に分けることにより, 連星の全運動エネルギーおよび原点の周りの全角運動量を求めよ.



質量が等しいので重心は中間点にあり, これは一定の速さ V で運動している. 連星はともに重心のまわりに半径 $r/2$, 角速度 ω の円運動を行っている.

重心の運動エネルギー

$$K_G = \frac{1}{2}2m \cdot V^2 = mV^2$$

重心に対する相対運動のエネルギー

$$K_R = \frac{1}{2}m\left(\frac{r}{2}\omega\right)^2 \times 2 = \frac{1}{4}mr^2\omega^2$$

したがって，連星の全運動エネルギーは

$$K = K_G + K_R = mV^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2$$

xy 平面内の運動なので，角運動量の z 成分のみ考える．

原点の周りの重心の角運動量 L_{G} は，

$$L_G = -a \cdot 2mV = -2amV$$ （図形的定義から考えること）

重心の周りの角運動量 L'は，

$$L' = \frac{r}{2} \cdot m\frac{r}{2}\omega \times 2 = \frac{1}{2}mr^2\omega$$

したがって，全角運動量 L は

$$L = L_G + L' = -2amV + \frac{1}{2}mr^2\omega$$

※4，5について，テキストは“換算質量”という考えを使っています．しかし，この解答で分かるように，とくに換算質量を使わなくとも素直に考えればできます．この授業ではシンプルに解くことを目指しています．