

基礎地球力学 質点系の力学(2) 予習課題 (15.1.22)

n 個の質点からなる系を考える。 i 番目の質点についての運動方程式は、次のように与えられる。

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

ここで、 $\mathbf{F}_i$ は系外からの力、 $\mathbf{F}_{ij}$ は j 番目の質点からはたらく力である。

この系の重心の位置 $\mathbf{X}$ および速度 $\mathbf{V}$ は、次のように定義される。

$$\mathbf{X} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{M}, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{x}_i = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{v}_i$$

ただし、 $M = \sum m_i$ である。

(1) 質点系の全運動エネルギー K は、次のように質点の運動エネルギーの和で与えられる。

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

重心に対する相対座標 $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X}$, および相対速度 $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ を用いると、全運動エネルギー K は次のように、重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動のエネルギーの和で表されることを示しなさい。

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

(2) 質点系の原点の周りの全角運動量は、次のように質点の角運動量の和で与えられる。

$$\mathbf{L} = \sum (\mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

全角運動量 $\mathbf{L}$ は、次のように重心の角運動量と重心の周りの角運動量の和で表されることを示しなさい。

$$\mathbf{L} = \mathbf{X} \times M \mathbf{V} + \sum (\mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$