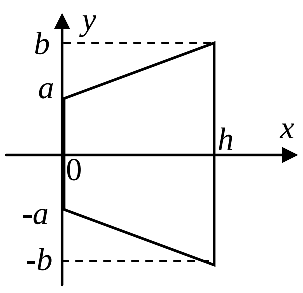
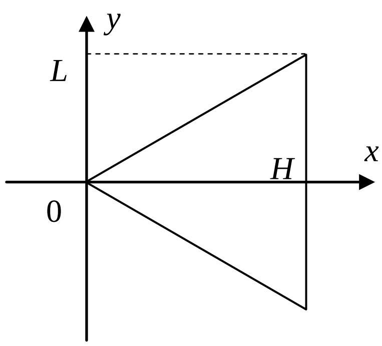
課題　13. 剛体の運動(1)　解答および解説

1. 次のような板について，重心の x 座標を求めなさい.

(1)密度(ρ)，厚さ(t)が一様な台形の板.

(2)密度(ρ)，厚さ(t)が一様な二等辺三角形(高さ:H, 底辺の長さ:$2L$)の板.





重心の定義

$$X = \frac{1}{M}\int m(x)xdx \text{，} m(x)\text{：単位長さ当たりの質量}$$

にしたがって計算すればよい.

(1) $M = \rho \cdot t \cdot \frac{1}{2}(2a+2b)h = \rho t(a+b)h$

$$m(x)dx = 2\rho t\left(a + \frac{b-a}{h}x\right)dx$$

したがって，

$$\int_0^h m(x)xdx = \int_0^h 2\rho t\left(a+\frac{b-a}{h}x\right)xdx = 2\rho t\int_0^h\left(ax+\frac{b-a}{h}x^2\right)dx$$

$$= 2\rho t\left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{b-a}{3h}x^3\right]_0^h = \rho t\frac{a+2b}{3}h^2$$

$$X = \frac{a+2b}{3(a+b)}h$$

(2) $M = \rho \cdot t \cdot \frac{1}{2}\cdot 2L \cdot H = \rho tLH$

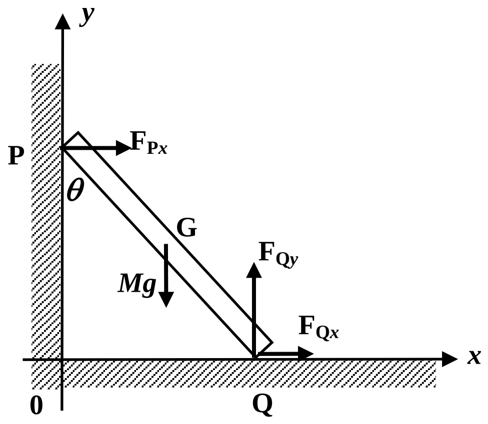
$$m(x)dx = 2\rho t\frac{L}{H}xdx$$

したがって，

$$\int_0^H m(x)xdx = 2\rho t\frac{L}{H}\int_0^H x^2dx = 2\rho t\frac{L}{H}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^H = 2\rho t\frac{L}{3H}H^3 = \frac{2}{3}\rho tLH^2$$

$$X = \frac{2}{3}H$$

2．長さ$2L$，質量Mの棒が滑らかな壁に角度θで斜めに立てかけられてある．水平方向にx軸，鉛直方向にy軸をとる．床と棒の間には静止摩擦力F_{Qx}が働いている(静止摩擦係数：μ_s)とする．棒にはたらく重力Mg(g：重力加速度)は，重心 G(この場合は棒の中心)に働いていると考えてよい．点 P では壁からの垂直抗力F_{Px}，点 Q では床からの垂直抗力F_{Qy}と静止摩擦力F_{Qx}がはたらいている．



(1)棒にはたらく力のつりあいの式をかけ．

$$\begin{pmatrix} F_{Px} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Qx} \\ F_{Qy} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ①$$

(2)原点のまわりの力のモーメントのつりあいの式をかけ．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2L\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Px} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Qx} \\ F_{Qy} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\sin\theta \\ L\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2LF_{Px}\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2LF_{Qy}\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -MgL\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2LF_{Px}\cos\theta + 2LF_{Qy}\sin\theta - MgL\sin\theta = 0 \qquad ②$$

(3)上の2つのつりあいの式から，F_{Px}，F_{Qx}，F_{Qy}を求めよ．

①の第2式より，$F_{Qy}=Mg$．これを②に代入して，

$$F_{Px} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta$$

また①の第1式より

$$F_{Qx} = -F_{Px} = -\frac{1}{2}Mg\tan\theta$$

(4)点 Q で棒が滑りださない条件を求めよ．

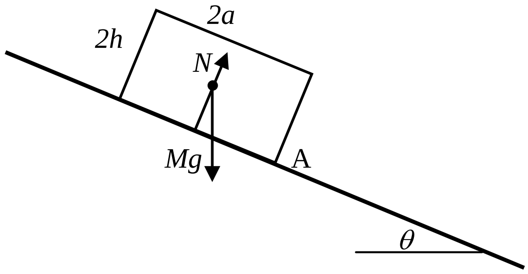
静止摩擦力についての条件

$$\left|F_{Qx}\right| = \frac{1}{2}Mg\tan\theta \le \mu_s F_{Qy} = \mu_s Mg$$

したがって，

$$\tan\theta \le 2\mu_s$$

3．図のように，水平面からθだけ傾いた斜面に質量 M の直方体が置かれている．その縦横の長さは，それぞれ $2h$，$2a$ である．斜面と直方体の間の最大静止摩擦係数をμとする．



（1）剛体が滑り始める時のθの値を求めよ．

直方体に働く静止摩擦力（斜面方向上向き）を F，斜面から働く垂直抗力（斜面に垂直で上向き）を N とする．静止状態における力のつり合いを考えると，

斜面方向：　$Mg\sin\theta - F = 0$　①

斜面に垂直な方向：　$N - Mg\cos\theta = 0$　②

①より，

$$F = Mg\sin\theta$$

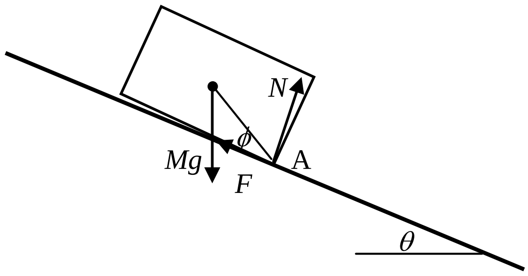
滑り始めるのは，静止摩擦力が最大静止摩擦力に達したときだから，

$$F = Mg\sin\theta = \mu Mg\cos\theta$$

したがって，

$$\tan\theta = \mu,\quad \theta = \tan^{-1}\mu$$

（2）右下の辺（図の点 A）を中心にして直方体が転がるためのθの条件を求めよ．（ヒント：転がり始める時には，斜面からの抗力は右下の辺で働く）



直方体に働いている力は，重力 Mg，静止摩擦力 F，垂直抗力Nである． 図のように転がり始める瞬間には，直方体は右下の辺でのみ斜面と接するので，静止摩擦力，垂直抗力は右下の辺で働く．斜面方向下向きに x 軸，斜面に垂直な方向に上向きに y 軸をとる．力のモーメントは z 成分のみ考えればよい．点 A の周りの力のモーメントを考えると，静止摩擦力，垂直抗力のモーメントはゼロ．重力のモーメント T_z は

$$T_z = Mg\sqrt{a^2+h^2}\cos(\phi+\theta) = Mg\sqrt{a^2+h^2}(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta)$$

ただし，

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},\quad \sin\phi = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

したがって，

$$T_z = Mg(a\cos\theta - h\sin\theta)$$

これが負ならば直方体は斜面下方へ転がるが，正ならばもとに戻って斜面上で静止する．すなわち，転がるための条件は，

$$a\cos\theta - h\sin\theta < 0,\quad \tan\theta > \frac{a}{h}$$

求める条件は

$$\theta > \tan^{-1}\left(\frac{a}{h}\right)$$

※傾斜θが

$$\tan\theta = \frac{a}{h}$$

を満たすとき

$$\cos(\phi+\theta) = 0$$

であり，重力のモーメントはゼロになります（重心に働く重力が点 A を通る）．

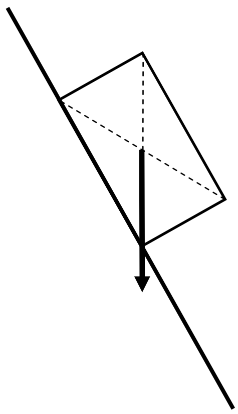
テキストの解答（p150）は，直方体の形によらず，θ>45°となっていますが，これは間違いです．

転がらない限界は右図のような状況．

このとき，

$$\tan\theta = \frac{a}{h}$$

これを超えれば転がり始める．



（3）θを増していったとき，転がる前に滑り始めるためには，a，h，μにどのような関係が成り立つことが必要か．

（1）より，滑り始めるための条件は

$$\theta \geq \tan^{-1}\mu$$

（2）より，転がり始める条件は

$$\theta > \tan^{-1}\left(\frac{a}{h}\right)$$

したがって，転がる前に滑り始めるための条件は，

$$\tan^{-1}\mu < \tan^{-1}\left(\frac{a}{h}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mu < \frac{a}{h}$$

※（2）と同様にテキストの解答は間違い．どうも a=h と考えてしまったようです．