

課題 14. 剛体の運動(2) 解答および解説

1. (1) 一様な密度 ρ をもつ半径 a , 長さ L の円柱がある. 中心軸のまわりの慣性モーメント I を求め, 質量 M を用いて表しなさい.

$$M = \rho \cdot \pi a^2 L = \pi \rho L a^2$$

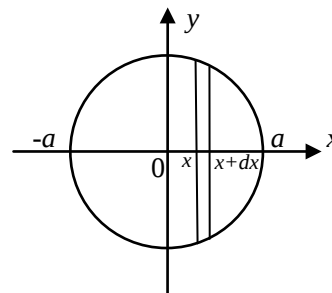
$$I = \int_0^a \rho (2\pi r dr) L r^2 = 2\pi \rho L \int_0^a r^3 dr = 2\pi \rho L \cdot \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{2} \pi \rho L a^4 = \frac{1}{2} M a^2$$

- (2) 一様な密度 ρ をもつ半径 a の球がある. 中心を通る軸のまわりの慣性モーメント I を求め, 質量 M を用いて表しなさい.

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \pi \rho a^3$$

右図の x 軸のまわりの慣性モーメントを考える. $x=x$ で厚さ dx の薄い円盤を考えると, この半径は

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$



であり, 円盤の慣性モーメントは(1)の結果を用いて

$$dI = \frac{1}{2} \cdot \rho \pi (a^2 - x^2) dx \cdot (a^2 - x^2) = \frac{1}{2} \pi \rho (a^2 - x^2)^2 dx$$

質量 半径の2乗

球の慣性モーメントは, これを $x=-a$ から $x=a$ まで積分したもの(足し合わせたもの)であるから,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx = \pi \rho \int_0^a (a^2 - x^2)^2 dx = \pi \rho \int_0^a (x^4 - 2a^2 x^2 + a^4) dx \\ &= \pi \rho \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} a^2 x^3 + a^4 x \right]_0^a = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \cdot a^2 = \frac{2}{5} M a^2 \end{aligned}$$

2. 非常に薄い板の上の1点を原点 O にとり, 板の面内に x 軸と y 軸, これに垂直に z 軸をとる. x, y, z 軸の周りの慣性モーメントをそれぞれ, I_x, I_y, I_z とすると,

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

である. これから,

$$I_z = I_x + I_y$$

が成り立つことを示しなさい.

i 番目の質点の z 軸からの距離を r_i とすると,

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y$$

3. 質量 m の質点が、原点を中心として xy 平面内で等速円運動している(半径: r , 角速度: ω).

(1) 質点の運動エネルギー K を求めなさい.

$$K = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

(2) 質点の z 軸の周りの慣性モーメント I_z を求めなさい.

$$I_z = m r^2$$

(3) 質点の運動エネルギー K を慣性モーメント I_z を用いて表しなさい.

$$K = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

剛体は質点の集まりであるから、その運動エネルギー、慣性モーメントは各質点の運動エネルギー、慣性モーメントの和である。したがって、上の運動エネルギーと慣性モーメントの関係は剛体についても成り立つ。ただし、この問題では運動が xy 平面内に限定されていることに注意しなければならない。一般には、

$$K = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

と表される。ここで、 I_i , ω_i は i 軸のまわりの慣性モーメントおよび角速度。

4. 図のように、半径 a , 慣性モーメント I の滑車に巻きつけた軽いひもに質量 m の物体をぶら下げる。初期に静止状態であったとすると、この物体は下向きに動き始め、滑車は回り始める。必要ならば、重力加速度を g として、以下の問いに答えなさい。

(1) ひもの張力を T , 物体の速度(下向きを正とする)を v として、物体の鉛直方向の運動方程式を書きなさい。

物体に働いている力は、重力 mg (下向き)と張力 T (上向き)であるから、

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T \quad (1)$$

(2) 滑車の回転の角速度を ω として、滑車の回転の運動方程式を書きなさい。

滑車に働く力は、張力 T , 重力、軸からの抗力であるが、重力(重心すなわち滑車の中心に働く)および抗力の軸のまわりのモーメントはゼロ。したがって、

$$I \frac{d\omega}{dt} = aT \quad (2)$$

(3) 物体の速度と回転の角速度の間に $v=a\omega$ の関係があることを用いて、物体の速度を時間の関数として求めなさい。

(1)より、

$$ma \frac{d\omega}{dt} = mg - T$$

両辺に a を掛けて(2)と加えると、

$$(I + ma^2) \frac{d\omega}{dt} = mga, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{mga}{(I + ma^2)}, \quad \frac{dv}{dt} = a \frac{d\omega}{dt} = \frac{mga^2}{(I + ma^2)}$$

初めは静止していたので、

$$v = \left(\frac{mga^2}{I + ma^2} \right) t$$

