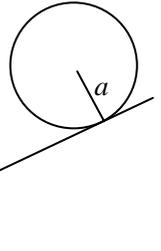


課題 15. 剛体の運動(3) 解答および解説

1. 図のように、水平から θ だけ傾いた斜面上に半径 a 、質量 M の球がある。初め静止状態にあり、滑らずに転がり落ちる場合を考える。球と斜面とが接する点ではつねに静止摩擦力が働いている。必要ならば、重力加速度を g として以下の問いに答えなさい。



- (1) 斜面方向に距離 L だけ移動したときの斜面方向の速さおよび回転の角速度を求めなさい。

斜面方向下向き velocities を v 、静止摩擦力を F とすると、並進運動の運動方程式は

$$M \frac{dv}{dt} = Mg \sin \theta - F$$

球に働く力は、重力、垂直抗力、静止摩擦力であるが、重力および垂直抗力の回転軸の周りのモーメントはゼロ。したがって、球の回転の運動方程式は、角速度を ω (反時計回りを正とする) として、

$$I \frac{d\omega}{dt} = aF$$

ただし、 I は球の慣性モーメント。球が滑らずに転がることから、

$$v = a\omega$$

が成り立つ。したがって、

$$(I + Ma^2) \frac{d\omega}{dt} = Mga \sin \theta, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga \sin \theta}{I + Ma^2}$$

はじめ静止していたので、

$$\omega = \frac{Mga \sin \theta}{I + Ma^2} t = \frac{Mga \sin \theta}{\frac{2}{5}Ma^2 + Ma^2} = \frac{5g \sin \theta}{7a} t \quad (\text{球の慣性モーメントは前回の課題1, (2)})$$

$$v = a\omega = \frac{5g \sin \theta}{7} t$$

斜面方向に距離 L だけ移動するのにかった時間を T とすると、

$$L = \frac{5g \sin \theta}{14} T^2 \quad \text{ゆえに} \quad T = \sqrt{\frac{14L}{5g \sin \theta}}$$

したがって、求める速度および角速度は

$$v(T) = \frac{5g \sin \theta}{7} \sqrt{\frac{14L}{5g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{10gL \sin \theta}{7}}$$

$$\omega(T) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{10gL \sin \theta}{7}}$$

- (2) 斜面方向に距離 L だけ移動する間に、重力がなした仕事を求め、球の運動エネルギーの変化量と比較しなさい。

重力がなした仕事 W は

$$W = MgL \sin \theta$$

球の運動エネルギーは、並進運動エネルギーと回転運動のエネルギーの和である。運動エネルギーの変化量は

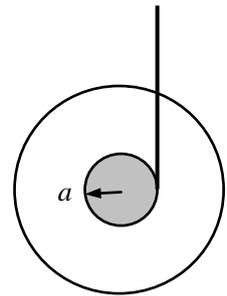
$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}M \cdot \frac{10gL \sin \theta}{7} + \frac{1}{2} \frac{2}{5}Ma^2 \cdot \frac{10gL \sin \theta}{7a^2} = MgL \sin \theta$$

したがって、 $W=K$ が成り立つ。

※滑りがないので静止摩擦力は仕事をしていない。そのため、重力のなした仕事はすべて運動エネルギーの変化量になる。

2. 質量 M 、慣性モーメント I のヨーヨーがある。図のように、半径 a の軸に糸を巻きつけ、糸の他端を固定して落下させる。落下の加速度を求めなさい。必要ならば重力加速度を g としなさい。



並進についての運動方程式（下向きを正）

$$M\dot{v} = Mg - T \quad (1)$$

回転についての運動方程式

$$I\dot{\omega} = aT \quad (2)$$

また、

$$v = a\omega \quad (3)$$

したがって、

$$\dot{\omega} = \frac{Mga}{(I + Ma^2)}, \quad \dot{v} = \frac{Mga^2}{(I + Ma^2)}$$

3. 半径 a 、質量 M の球を回転させずに初速度 v_0 を与えた。はじめ球は回転せずに滑っているが、やがて摩擦のために回転しはじめ、滑らずに転がるようになる(ボーリングの球が転がる様子などを思い浮かべてみるとよい)。滑らずに転がるようになるまでの時間を求めなさい。なお、球と床の接点が滑っているときの動摩擦係数を μ とする。



※球の回転角速度を ω (時計回りを正とする。通常とは逆。), 並進速度を v (右向きを正とする。) とすると、滑らずに転がる条件は、

$$v = a\omega$$

である。この状態に達する時刻を求めればよい。

並進の運動方程式(水平方向)は, 動摩擦力(左向き)を F として

$$M\dot{v} = -F = -\mu N = -\mu Mg$$

したがって,

$$\dot{v} = -\mu g$$

初期条件を考慮して,

$$v = v_0 - \mu g t \quad (1)$$

※並進速度はこれにたがって減少していく.

一方, 回転の運動方程式は, 球の慣性モーメントを I として,

$$I\dot{\omega} = aF = a\mu Mg$$

したがって,

$$\dot{\omega} = \frac{a\mu Mg}{I}$$

初期条件(初めは回転していない)を考慮して,

$$\omega = \frac{a\mu Mg}{I} t \quad (2)$$

したがって, 滑らずに転がる状態に達するのは, (1), (2)より,

$$v_0 - \mu g t = a\omega = \frac{a^2 \mu Mg}{I} t$$

のとき. これを解けば

$$t = \frac{Iv_0}{(I + Ma^2)\mu g}$$

ここで, 一様な密度をもつ球の慣性モーメントは

$$I = \frac{2}{5} Ma^2$$

であるから(前回の課題),

$$t = \frac{Iv_0}{\mu(I + Ma^2)g} = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}$$

4. 摩擦のない水平な台の上に均質な球(質量 M)が静止している. この球を棒で水平方向に一定の力 f で押すときの球の運動を考えよう. なお, 球の中心を通る軸の周りの慣性モーメントを I とする.

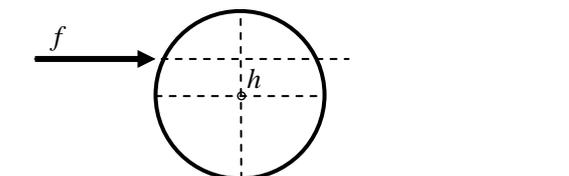
(1) 球の中心から h だけ上方を押す. 球の並進速度を v , 回転角速度を ω として並進運動, 回転運動の方程式を書きなさい.

並進の運動方程式は

$$M\dot{v} = f$$

回転の運動方程式は

$$I\dot{\omega} = hf$$



(2) 球が滑らずに転がるためには, どの高さで押せばよいか.

(1)より並進運動の加速度および回転の角加速度は

$$\dot{v} = \frac{f}{M}, \quad \dot{\omega} = \frac{hf}{I}$$

滑らずに転がるためには,

$$v = a\omega$$

でなければならない。したがって,

$$\dot{v} = a\dot{\omega}$$

でなければならない。

$$\dot{v} = \frac{f}{M} = a\dot{\omega} = \frac{ahf}{I}$$

したがって,

$$h = \frac{I}{Ma}$$

球の慣性モーメントを質量と半径で表せば,

$$h = \frac{I}{Ma} = \frac{\frac{2}{5}Ma^2}{Ma} = \frac{2}{5}a$$

(3)球が転がらずに滑るためには, どの高さで押せばよいか.

回転の運動方程式で力のモーメントがゼロになればよいのだから, $h=0$.

※中心よりも下方を押せば当然逆回転になる.